V. Boltianski

ENVELOPPES

A. Fétissov

DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES

I. Doubnov

ERREURS DANS LES DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES

Éditions Mir Moscou

В. Болтянский

ОГИБАЮЩАЯ

А. Фетисов

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ
В ГЕОМЕТРИИ

Я. Дубнов

ОШИБКИ
В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ
ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ

Физматгиз · Москва

V. Boltianski

ENVELOPPES

A. Fétissov

DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES

I. Doubnov

ERREURS DANS LES DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES

Éditions Mir • Moscou

Traduit du russe
par *O. SMIRNOV*

На французском языке

AVANT-PROPOS

Avec ce petit livre les Editions Mir poursuivent la publication de cours faits par d'éminents mathématiciens et pédagogues soviétiques aux écoliers du secondaire pour les initier aux mathématiques supérieures.

Le présent opuscule réunit trois fascicules contenant des cours professés dans des cercles mathématiques près l'Université de Moscou.

Dans le premier le professeur V. Boltianski traite des enveloppes. En s'appuyant sur certaines notions de mécanique l'auteur fournit quelques exemples intéressants de construction des enveloppes telles que parabole, hyperbole, astroïde, cycloïde, courbes dites remarquables largement répandues en mathématiques et dans leurs applications, puis il passe aux enveloppes en général, indique comment on en établit les équations et termine par des notions sommaires sur les dérivations.

Le deuxième fascicule, dû au professeur A. Fétissov, aborde les problèmes concernant la démonstration mathématique, les propositions fondamentales et le système d'axiomes géométriques.

Enfin, dans le troisième fascicule le professeur I. Doubnov passe en revue des cas de démonstrations erronées dont il analyse ensuite en détails les causes avec beaucoup de remarques et notes complémentaires.

Le texte en petit caractère ainsi que les notes en bas de page peuvent être omis par ceux dont la formation mathématique ne dépasse pas le secondaire. Par contre ils seront fort utiles aux maîtres et pour des analyses dans des cercles de mathématiques.

Nous espérons que dans l'exposé clair et accessible de ce livre les élèves des classes terminales, de même que ceux qui veulent entreprendre l'étude autodidactique des mathématiques trouveront, tout en approfondissant leurs connaissances, un agréable délassement.

V. Boltianski

Enveloppes

I. PARABOLE DE SÛRETÉ

1. MOUVEMENT D'UN PROJECTILE, LANCÉ SOUS UN CERTAIN ANGLE PAR RAPPORT À L'HORIZON

Supposons qu'un projectile de petites dimensions (point matériel) est animé d'un mouvement libre au-dessus de la surface de la Terre. Pour se faire une idée correcte du mouvement de ce point il faut tenir compte de toutes les forces dont il est l'objet et, en premier lieu, de la pesanteur et des forces dues au milieu aérien. Dans certains cas ces dernières constituent un facteur assez important, dans d'autres leur influence est négligeable. Ainsi, par exemple, si l'on considère un planeur en vol, il est impossible de faire abstraction de ces forces — l'air « soutient » le planeur. Mais s'il s'agit d'un obus ou d'une fusée balistique, la résistance de l'air est moins importante. La fig. 1 donne la forme approximative de la trajectoire d'un obus dans l'espace (la courbe continue est appelée *courbe balistique*) et celle d'une courbe qu'aurait décrite un obus soumis à l'action d'une seule force, celle de la pesanteur.

Dans la suite de l'exposé on ne considérera que ce mouvement « simplifié », idéalisé, des points soumis uniquement à l'action de la pesanteur, on fera donc abstraction de la résistance de l'air et d'autres forces moins importantes (soit, des forces du magnétisme terrestre, de l'attraction de la Lune, du Soleil, des étoiles, etc.). Convenons de considérer la force de la pesanteur $P = mg$ comme constante et dirigée verticalement vers le bas. Nous admettons ainsi que le point est sollicité uniquement par la force de la pesanteur qui communique à ce point une accélération g constante en grandeur et en direction.

Désignons par L la courbe suivant laquelle se déplace un point (trajectoire de son mouvement). A chaque instant

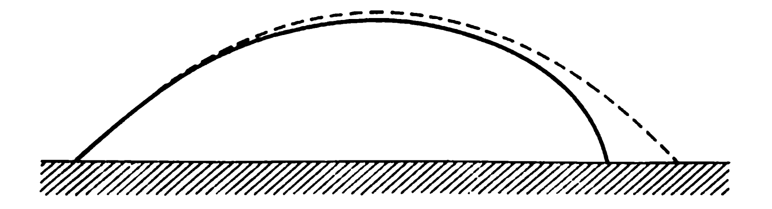


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

ce point mobile se trouve en un point quelconque de cette trajectoire et a une *vitesse de mouvement* déterminée. La vitesse est un *vecteur* (grandeur orientée), ce vecteur étant *tangent* à la trajectoire L. Dans le cas considéré cela signifie que toute la trajectoire L est située d'un côté de la droite suivant laquelle est dirigé le vecteur vitesse v (fig. 2).

En utilisant la règle du parallélogramme on peut décomposer la vitesse d'un point en deux composantes — verticale et horizontale. L'accélération g étant dirigée verticalement, elle ne peut changer la composante horizontale de la vitesse; on peut donc supposer que la composante horizontale reste donc constante pendant toute la durée de mouvement. Autrement dit, la projection d'un point sur un plan horizontal est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme (fig. 3). Supposons, par exemple, qu'une partie de la surface de la Terre, au-dessus de laquelle se déplace un point, soit parfaitement plane et horizontale et que le Soleil soit au zénith. Dans ce cas l'ombre du point sera animé d'un mouvement rectiligne et uniforme (si l'on considère les rayons du Soleil comme parallèles entre eux). Ainsi, le mouvement d'un point s'effectue dans un même plan vertical. Dans ce qui suit nous considérerons ce plan confondu avec celui du dessin.

Convenons de considérer comme positive la direction d'une droite verticale vers le haut. Alors la composante verticale de la vitesse se modifie avec l'accélération $-g$, c'est-à-dire avec le ralentissement g. En désignant les composantes horizontale et verticale de la vitesse initiale par v_0^h et v_0^v, on obtient pour les composantes de la vitesse, t s après le début du mouvement, les formules suivantes

$$v^h = v_0^h, \tag{1}$$

$$v^v = v_0^v - gt. \tag{2}$$

Admettons qu'au moment initial un point mobile se trouve au point A à la hauteur h_0 au-dessus de la surface

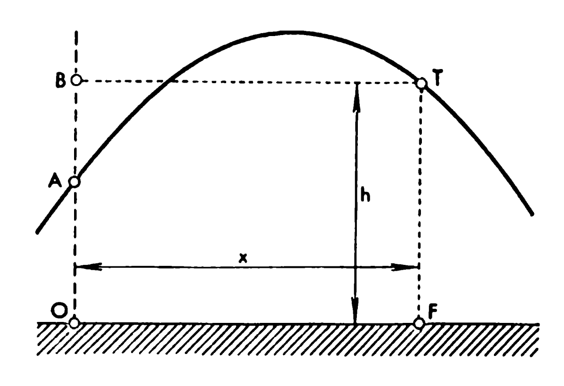


Fig. 4

de la Terre qu'on suppose plane et horizontale. Soit O la projection du point A sur la surface terrestre (fig. 4). Supposons que la composante horizontale de la vitesse initiale soit dirigée à droite. Désignons par T la position qu'occupe le point t s après le commencement du mouvement et par B et F les projections du point T sur les droites verticale et horizontale passant par le point O. Posons, enfin, $OB = h$ et $OF = x$. Alors il est évident que

$$x = v_0^{\mathrm{h}} t, \tag{3}$$

car le point F est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme avec la vitesse initiale v_0^{h}. Etant donné que $AB = h - h_0$ est le chemin parcouru par le point B en *mouvement uniformément accéléré* avec la vitesse initiale v_0^{v} et avec l'accélération $-g$, nous avons

$$h - h_0 = v_0^{\mathrm{v}} t - \frac{gt^2}{2}$$

ou

$$h = h_0 + v_0^{\text{v}} t - \frac{gt^2}{2}\,. \tag{4}$$

Les formules (1), (2) déterminent la vitesse et les formules (3), (4) la position d'un point t s après son départ.

2. PARABOLE

Dans les formules (1) à (4) il est sous-entendu que t n'admet que des valeurs positives, car on envisage le mouvement d'un point *à partir* de l'instant $t = 0$ où il était lancé avec une certaine vitesse initiale. Néanmoins ces formules ont également le sens pour des valeurs négatives de t. Supposons, par exemple, qu'un corps a commencé son mouvement *avant* l'instant $t = 0$ qui nous intéresse. A l'instant $t = 0$ nous avons fixé la position du corps et sa vitesse que nous considérons comme « initiales ». Alors le mouvement du corps avant l'instant $t = 0$ est également décrit par les formules (1) à (4) si t prend dans ces formules les valeurs négatives. Ce mouvement est représenté sur la fig. 5 en pointillé. En attribuant à t des valeurs aussi bien positives que négatives, on obtient donc toute la trajectoire du mouvement d'un point à droite et à gauche d'un point « initial » A donné.

La courbe ainsi obtenue s'appuie par ses extrémités sur l'horizontale OD — le corps touche terre et le mouvement cesse. Supposons pourtant qu'au point D, là où tombe le point, on ait creusé une fosse (fig. 5). Dans ce cas la chute du corps se poursuivra durant un certain laps de temps et les formules (1) à (4) resteront vraies. Le corps se trouvera alors au-dessous de la droite OD, de sorte que h prendra des valeurs négatives. Ainsi, on peut prolonger tout à fait naturellement la trajectoire du mouvement d'un point au-dessous de la droite OD et la décrire par les mêmes formules (1) à (4). En attribuant à t des valeurs toujours plus grandes on peut prolonger cette trajectoire aussi loin que

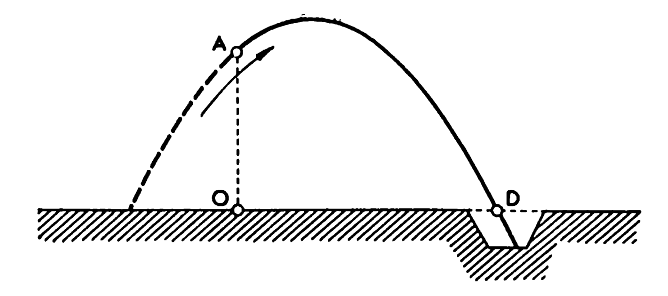


Fig. 5

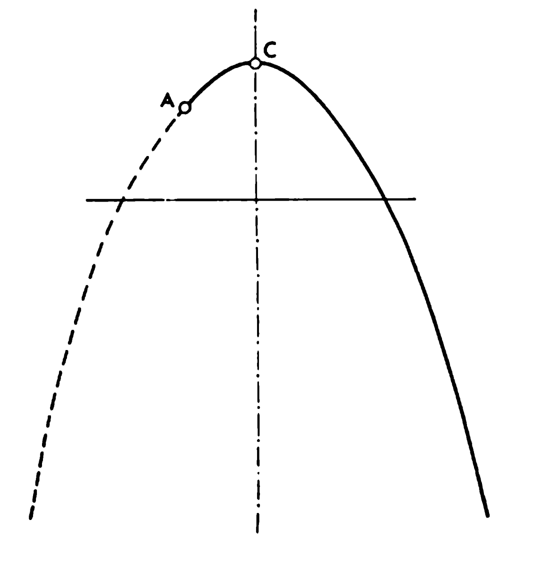


Fig. 6

l'on veut. De même, en attribuant à t dans les formules (1) à (4) des valeurs négatives croissantes en valeur absolue, on peut prolonger la « branche » gauche de la courbe aussi loin que l'on veut. On obtient en définitive une courbe dont les deux branches s'éloignent à l'infini du point A; elle est appelée *parabole* (fig. 6). Les formules (1) à (4) décrivent le mouvement d'un point suivant cette courbe sous l'action d'une accélération de valeur et de direction constantes *).

En se servant des formules (1) à (4), étudions certaines propriétés du mouvement d'un point suivant une parabole. De la formule (2) il s'ensuit qu'à l'instant $t = \frac{v_0^{\text{v}}}{g}$ la composante verticale v^{v} de la vitesse est nulle. Jusqu'à cet instant la composante v^{v} était positive, c'est-à-dire que le point se déplaçait vers le haut; après cet instant elle est négative — le corps se déplace vers le bas. Autrement dit, *à l'instant*

$$t = \frac{v_0^{\text{v}}}{g} \tag{5}$$

le point atteint la hauteur maximale, soit

$$h_{\max} = h_0 + \frac{(v_0^{\text{v}})^2}{2g} \tag{6}$$

(cf. (4)). Il est facile de s'en convaincre à l'aide des calculs directs:

$$\left[h_0 + \frac{(v_0^{\text{v}})^2}{2g}\right] - h = \left[h_0 + \frac{(v_0^{\text{v}})^2}{2g}\right] - \left(h_0 + v_0^{\text{v}}t - \frac{gt^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{(v_0^{\text{v}})^2}{2g} - v_0^{\text{v}}t + \frac{gt^2}{2} = \frac{1}{2g}(v_0^{\text{v}} - gt)^2 \geqslant 0,$$

*) La partie de l'espace dans laquelle chaque unité de masse est soumise à l'action de la force de la pesanteur constante en grandeur et en direction est appelée *champ uniforme de la pesanteur*. Une partie limitée de l'espace au-dessus de la surface de la Terre peut approximativement être considérée comme champ uniforme de la pesanteur. Le mouvement d'un corps s'effectue suivant une courbe proche d'un petit arc de parabole et s'interrompt au moment de la chute du corps à terre. L'étude de toute la parabole, c'est-à-dire des deux branches de la courbe s'éloignant à l'infini, n'a pour le problème en question qu'un sens purement mathématique.

c'est-à-dire $h \leqslant h_0 + \left(\frac{v_0^{\mathrm{v}}}{2g}\right)^2$ pour tout t. Désignons par C le point le plus haut de la parabole. La vitesse du mouvement d'un projectile au point C est horizontale. Autrement dit, on obtient la portion de la parabole située à droite du point C si le point est lancé à l'origine C horizontalement vers la droite avec une vitesse correspondante. La partie de gauche de la parabole s'obtient si l'on lance ce point horizontalement vers la gauche avec la même vitesse. Il s'ensuit que la droite verticale passant par C est l'*axe de symétrie* de la parabole. Le point C où la parabole coupe son axe de symétrie est appelé *sommet* de la parabole.

3. PARABOLE DE SÛRETÉ

Passons maintenant à l'étude de la trajectoire d'obus tirés d'un canon se trouvant en un point quelconque O de la surface de la Terre. Supposons que la vitesse v_0 avec laquelle un obus part de la bouche du canon ne dépend pas de l'angle φ d'inclinaison du tube par rapport à l'horizon. Ainsi nous devons examiner la trajectoire d'un obus lancé à l'origine O avec une vitesse v_0 sous un angle φ par rapport à l'horizon (fig. 7).

A l'instant $t = \frac{v_0^{\mathrm{v}}}{g}$ l'obus atteint le sommet de sa trajectoire qui, d'après la formule (6), se trouve à la hauteur

$$h_{\max} = \frac{(v_0^{\mathrm{v}})^2}{2g} .$$

Posons $h_0 = 0$, car le canon se trouve à la surface de la Terre; nous négligeons de plus la hauteur du canon. De la figure 7 il s'ensuit que $v_0^{\mathrm{v}} \leqslant v_0$ et l'égalité $v_0^{\mathrm{v}} = v_0$ n'est vérifiée que si $\varphi = 90°$. Ainsi, la hauteur maximale est atteinte lorsqu'on tire verticalement vers le haut; elle s'exprime par la formule

$$H = \frac{v_0^2}{2g} . \tag{7}$$

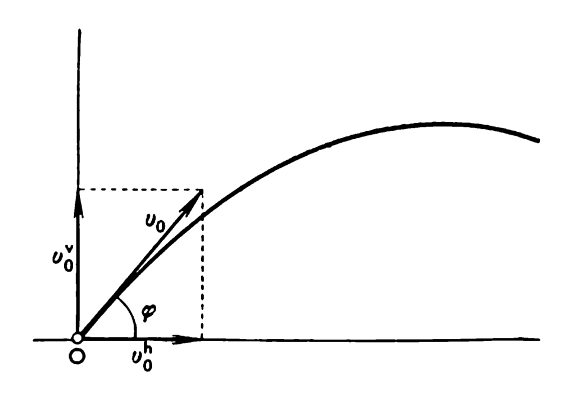


Fig. 7

Passons aux calculs de la portée du jet d'un obus. Il est évident que sa hauteur au-dessus de la terre n'est nulle qu'en deux points — à son point de départ et à son point de chute (éclatement à terre). De la formule (4) il s'ensuit que la hauteur s'annule pour les valeurs de t, racines de l'équation (rappelons que $h_0 = 0$)

$$v_0^v - \frac{gt^2}{2} = 0,$$

c'est-à-dire pour $t = 0$ ou $t = \frac{2v_0^v}{g}$. La première racine correspond à l'instant de départ de l'obus, la deuxième à celui de son éclatement. La distance qui sépare les points de tir et d'éclatement est égale, conformément à (3), à

$$x_{max} = v_0^h t = \frac{2v_0^h v_0^v}{g}. \tag{8}$$

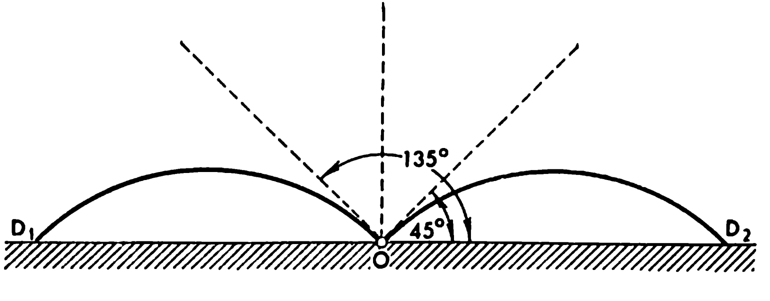


Fig. 8

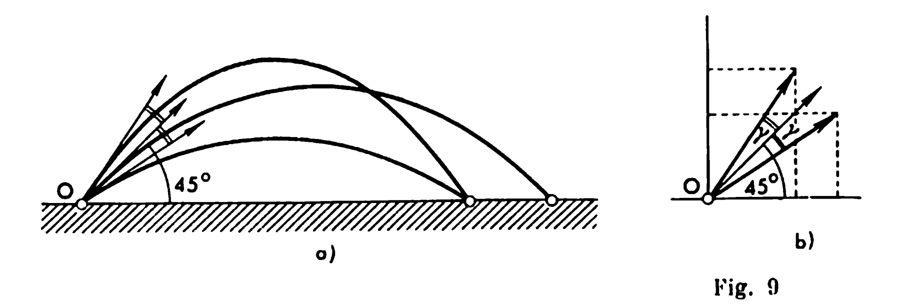


Fig. 9

C
D_1
D_2
O

Fig. 10

Mettant cette expression sous la forme

$$x_{max} = \frac{2v_0^h v_0^v}{g} = \frac{[(v_0^v)^2 + (v_0^h)^2 - (v_0^v - v_0^h)^2]}{g} = \frac{v_0^2 - (v_0^v - v_0^h)^2}{g},$$

on établit que la *portée maximale du jet* est obtenue pour $v_0^v = v_0^h$, c'est-à-dire pour $\varphi = 45°$; elle est égale à

$$X = \frac{v_0^2}{g}, \tag{9}$$

double de la valeur de la hauteur maximale.

D'une manière analogue on peut montrer que pour des angles obtus α (c'est-à-dire quand $v_0^h < 0$ et, par conséquent, que la trajectoire se trouve à gauche du point O) la portée maximale est atteinte pour $\alpha = 135°$. Cela devient, d'ailleurs, tout à fait clair en partant des considérations de la symétrie (fig. 8).

Il est intéressant de noter que si le tube d'un canon décline d'un même angle vers le haut ou vers le bas par rapport à l'angle $\varphi = 45°$, la portée du jet d'un obus dans ces deux cas reste la même (fig. 9, *a*). En effet (fig. 9, *b*)

$$v_0^h \,|_{\text{pour un angle } 45°+\gamma} = v_0^v \,|_{\text{pour un angle } 45°-\gamma};$$

$$v_0^v \,|_{\text{pour un angle } 45°+\gamma} = v_0^h \,|_{\text{pour un angle } 45°-\gamma}.$$

Donc, le produit $v_0^h v_0^v$ pour des angles $45° + \gamma$ et $45° - \gamma$ est constant et par conséquent (cf. (8)) la portée est la même.

Etudions maintenant la *zone de tir*, c'est-à-dire essayons de déterminer la partie de l'espace atteinte par les trajectoires d'un obus si l'on tire sous des angles φ différents. La zone de tir — si l'on suppose que toutes les trajectoires soient situées dans un même plan — est limitée par une courbe en forme de coupole passant par le point C de la hauteur maximale et les points D_1, D_2 des éclatements les plus éloignés (fig. 10). Cette courbe, on va le montrer, est également une parabole.

Pour commencer, menons une parabole par les points C, D_1 et D_2. Autrement dit, élucidons le problème sui-

vant : *quelle doit être la vitesse horizontale initiale d'un obus tiré au point C se trouvant à la hauteur* $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$ (cf. (7)), *pour que sa trajectoire passe par le point* D_2 *distant de l'origine O de* $\frac{v_0^2}{g}$ (cf. (9)). Notons cette vitesse recherchée par u. De la formule (4), où l'on pose $v_0^{\mathrm{v}} = 0$ et $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$, on obtient que la hauteur de l'obus au-dessus de la terre, t s après son départ, s'exprime par la formule $\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}$. L'instant de sa chute à la terre peut être déterminé à partir de l'équation $\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2} = 0$, d'où $t = \frac{v_0}{g}$ (la racine négative est à négliger). De la formule (3), où l'on pose $v_0^{\mathrm{h}} = u$, on déduit que le point de chute se trouve à une distance $ut = u\frac{v_0}{g}$ du point O. Pour que ce point coïncide avec le point D_2, il faut que l'équation $u\frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{g}$ soit vérifiée, c'est-à-dire $u = v_0$. Donc, la trajectoire d'un obus lancé horizontalement du point C avec une vitesse v_0 passe par le point D_2. Cette trajectoire, si on la prolonge à droite et à gauche du point C, est appelée *parabole de sûreté*, car, comme nous allons le voir, elle limite la zone de tir et un avion se trouvant au-dessus d'elle est hors d'atteinte. Pour plus de commodité écrivons les formules définissant, pour l'instant t, la position et la vitesse d'un obus imaginé qui se meut suivant une parabole de sûreté. Elles se déduisent de (1) à (4), en y posant $v_0^{\mathrm{v}} = 0$, $v_0^{\mathrm{h}} = v_0$, $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$:

$$v^{\mathrm{h}} = v_0, \tag{10}$$

$$v^{\mathrm{v}} = -gt, \tag{11}$$

$$x = v_0 t, \tag{12}$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}. \tag{13}$$

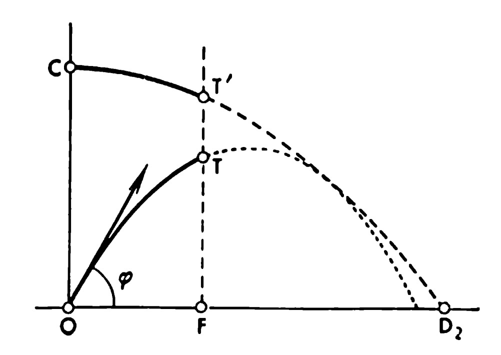


Fig. 11

Un obus tiré du canon O se trouvera, t s après son départ, au point T, dont la projection F est distante du point O de $x = v_0^h t$ (cf. (3)). Déterminons la position T' d'un obus imaginé pour laquelle il se trouvera sur une même droite verticale avec le point T (fig. 11). Une telle position sera atteinte par notre obus imaginé dans un intervalle de temps t' après son départ du point C tel que nous avons $v_0 t' = OF = v_0^h t$ (cf. (3), (12)), c'est-à-dire dans $t' = t\frac{v_0^h}{v_0}$ s. Les obus imaginé et réel se trouveront à ce moment aux hauteurs

$$FT' = h_0 - \frac{g\,(t')^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2}\left(t\,\frac{v_0^h}{v_0}\right)^2, \quad FT = v_0^v t - \frac{gt^2}{2}.$$

La différence de ces hauteurs est non négative

$$FT' - FT = \frac{v_0^2}{2g} - v_0^v t + \frac{gt^2}{2}\left[1 - \left(\frac{v_0^h}{v_0}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{v_0^2}{2g} - v_0^v t + \frac{gt^2}{2}\left(\frac{v_0^v}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{2g}\left(v_0 - gt\,\frac{v_0^v}{v_0}\right)^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, le point T se trouve toujours *plus bas* que le point T', sauf à l'instant $t = \frac{v_0^2}{g v_0^{v}}$, où $FT' - FT = 0$, c'est-à-dire quand les points T et T' coïncident. Donc, la *trajectoire du mouvement d'un obus est disposée au-dessous de la parabole de sûreté et n'a avec elle qu'un seul point de contact*. Un obus tiré du canon O sous un angle φ par rapport à l'horizon atteint la parabole de sûreté dans $t = \frac{v_0^2}{g v_0^{v}}$ s ; la projection F de l'obus sur la terre se trouve en ce moment à la distance

$$x = v_0^{h} t = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{v_0^{h}}{v_0^{v}} = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{cotg} \varphi$$

du point O. Lors de la variation de φ de 90° à 45° cette expression admet toutes les valeurs comprises entre 0 et $\frac{v_0^2}{g}$ (la cotangente varie de 0 à 1), de sorte que la trajectoire d'un obus quelconque parti du point O est tangente en n'importe *quel* point à la parabole de sûreté. Autrement dit, *tirant du point O sous les angles différents on peut atteindre un avion se trouvant en tout point de la parabole de sûreté ou au-dessous de celle-ci*, *mais aucun obus ne peut passer au-dessus de la parabole de sûreté*, c'est-à-dire cette parabole de sûreté limite effectivement la zone de tir.

Revenons de nouveau à la fig. 10. On a une infinité des courbes différentes — paraboles qui représentent des trajectoires des obus. On y voit également une autre courbe — parabole de sûreté — qui limite une zone remplie de trajectoires d'obus, cette parabole étant tangente à chacune d'elles. Ce fait peut être exprimé comme suit : la *parabole de sûreté est l'enveloppe des trajectoires décrites par des obus en vol* *).

---

*) On peut passer dès maintenant à la lecture du chapitre II.

4. CERTAINES PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE

Passons à l'étude de certaines propriétés de la parabole de sûreté *).

La distance entre le point O et le point T, où un obus, qui se déplace suivant la parabole de sûreté, se trouvera t s après son départ du point C, est égale à (cf. (12), (13)):

$$OT = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{(v_0 t)^2 + \left(\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g} + \frac{gt^2}{2}\right)^2} = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - h.$$

Menons une droite horizontale d distante de la surface de la terre de $\frac{v_0^2}{g}$. De la fig. 12 il s'ensuit que $\frac{v_0^2}{g} - h$ est alors la distance du point T à la droite d. On obtient ainsi la propriété géométrique la plus importante de la parabole qu'on prend souvent pour sa définition: la *parabole est le lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe O et d'une droite fixe d* (fig. 13). Le point O est appelé *foyer* de la parabole et la droite d sa *directrice*.

Déduisons, pour conclure, une autre propriété de la parabole: *si MN est une tangente à la parabole au point T et F la projection du point T sur une droite horizontale, l'égalité suivante $\widehat{FTN} = \widehat{OTM}$ a lieu* (voir fig. 12). Pour démontrer l'égalité de ces angles il suffit de démontrer que $\operatorname{tg} \widehat{FTN} = \operatorname{tg} \widehat{OTM}$. Etant donné que la tangente MN coïncide avec la direction de la vitesse v au point T (fig. 14), nous avons (cf. (10) à (13))

$$\operatorname{tg} \widehat{FTN} = \frac{v^h}{-v^v} = \frac{v_0}{gt}; \quad \operatorname{tg} \widehat{OTF} = \frac{x}{h} = \frac{v_0 t}{\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}}. \qquad (14)$$

---

*) On peut montrer que toute autre parabole possède des propriétés analogues.

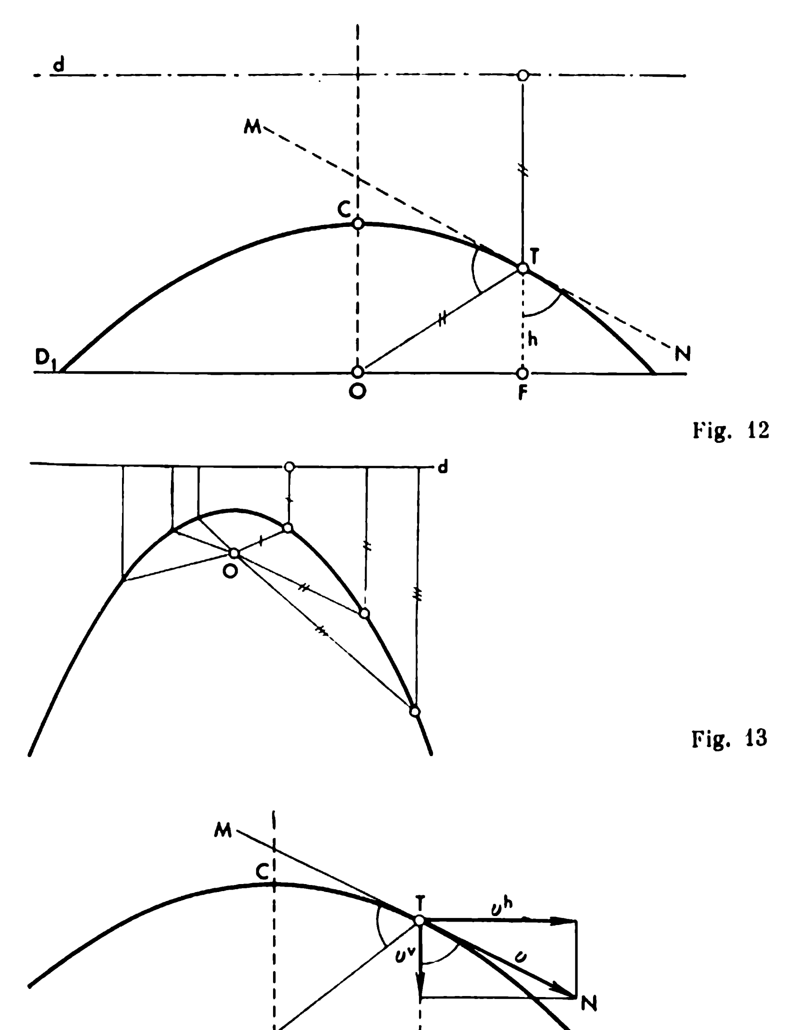


Fig. 12

Fig. 13

Fig. 14

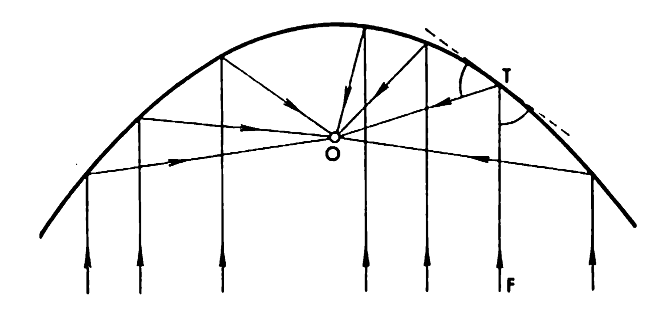


Fig. 15

Poursuivons

$$\operatorname{tg}\widehat{OTM} = \operatorname{tg}(180° - \widehat{OTN}) = -\operatorname{tg}\widehat{OTN} =$$

$$= -\operatorname{tg}(\widehat{FTN} + \widehat{OTF}) = -\frac{\operatorname{tg}\widehat{FTN} + \operatorname{tg}\widehat{OTF}}{1 - \operatorname{tg}\widehat{FTN}\operatorname{tg}\widehat{OTF}},$$

ou, en y portant les valeurs tirées de (14) et en simplifiant, on obtient

$$\operatorname{tg}\widehat{OTM} = \frac{v_0}{gt}. \qquad (15)$$

Ainsi donc, $\operatorname{tg}\widehat{OTM} = \operatorname{tg}\widehat{FTN}$, ce qu'il fallait démontrer. La propriété démontrée signifie que, si un rayon lumineux issu du point F est dirigé vers le haut et si la parabole est considérée comme un miroir, le rayon lumineux se réfléchit au point T selon la loi « l'angle d'incidence est égal

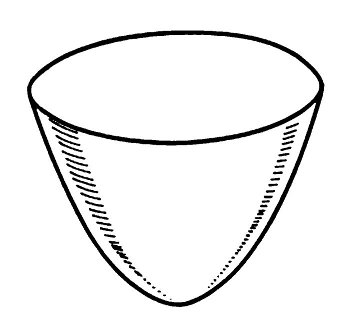


Fig. 16

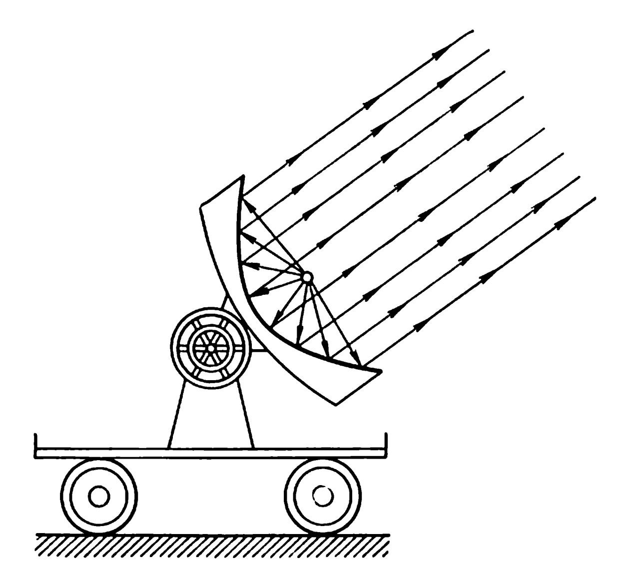


Fig. 17

à celui de réflexion » suivant un segment OT et passe par le point O. Cela étant vrai pour tout point T, alors un *faisceau des rayons lumineux parallèles et dirigés verticalement vers le haut se réfléchit sur la parabole et converge à son foyer O* (fig. 15). Lorsqu'une parabole tourne autour de son axe de symétrie, elle engendre une surface appelée paraboloïde de révolution (fig. 16) possédant la même propriété, c'est-à-dire qu'on obtient un réflecteur parabolique. Inversement, si une source lumineuse est placée au foyer de la parabole ou du réflecteur, les rayons lumineux se réfléchissent en formant un faisceau des rayons parallèles. C'est sur cette propriété d'une surface parabolique qu'est basée la construction des phares (fig. 17).

II. HYPERBOLE — FRONTIÈRE DE LA ZONE D'AUDIBILITÉ

1. VOL SUPERSONIQUE D'UN AVION

Soit un avion en vol supersonique se trouvant à l'altitude h au-dessus de la surface de la Terre. La question est de savoir : quelle est, à un moment donné, la zone de la surface terrestre où l'on a entendu et où l'on peut entendre actuellement le bruit de ses moteurs ? Nous utiliserons ce problème (détermination de la zone d'audibilité) en tant que deuxième exemple de la construction de l'enveloppe. Supposons que la surface terrestre que survole notre avion soit absolument plane, l'altitude h et la vitesse v du vol soient constantes.

Certes, pour un tel énoncé du problème il ne faut envisager qu'une zone limitée de la surface terrestre, supposée approximativement plane, que l'avion survole pendant une durée également limitée. Mais pour la résolution mathématique du problème on suppose que la surface survolée soit un plan i l l i m i t é et que la durée du vol soit également illimitée. En raisonnant ainsi nous obtiendrons des résultats qui n'ont un sens que pour une partie l i m i t é e du plan, qu'on peut considérer comme coïncidant avec une partie de la surface terrestre. Convenons, néanmoins, de façon purement conventionnelle, d'appeler ce plan illimité « surface terrestre ».

A chaque instant de son vol l'avion se trouve au-dessus d'un point déterminé de la surface terrestre. Ce point, projection de l'avion sur la surface terrestre, se déplace d'un mouvement uniforme avec une vitesse v, traçant ainsi une droite l parallèle à la trajectoire de l'avion dans l'espace (fig. 18) (l'avion se déplace de droite à gauche).

Supposons qu'à un instant donné où l'on s'intéresse à la zone d'audibilité, l'avion se trouve au-dessus d'un point

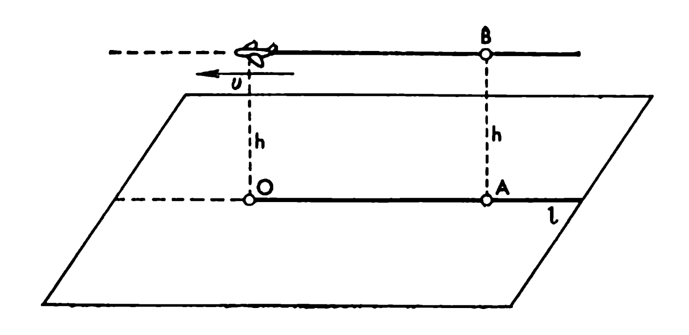


Fig. 18

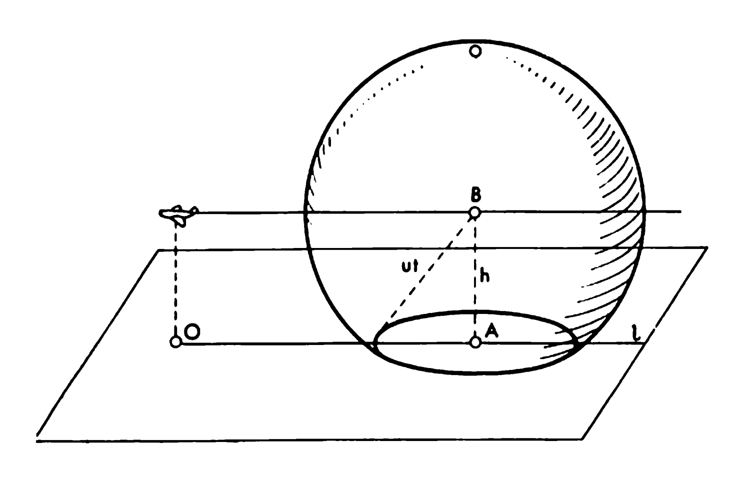


Fig. 19

O de la droite l. Il est évident que, t s avant cet instant, l'avion s'est trouvé au-dessus du point A de la droite l situé à droite du point O à la distance $OA = vt$. Désignons par B le point de l'espace où se trouvait alors notre avion. Ce point est situé à la hauteur h du point A de la surface terrestre. Lors du passage de l'avion par le point B le son émis par l'avion a commencé à se propager à partir du point B dans toutes les directions. Désignons par u la vitesse de la propagation du son dans l'air. Le son émis par l'avion au moment où celui-ci passe au-dessus du point O, c'est-à-dire t s après son passage par le point B, se propage à partir du point B dans toutes les directions à une distance ut. Autrement dit, partant du point B le son occupe, durant cet intervalle de temps, une *sphère* de rayon ut et de centre B. Si le rayon de cette sphère est plus grand que h, le son atteindra même la terre, et le domaine de la surface terrestre où parviendra le son issu du point B est un *cercle* formé par l'intersection de la sphère en question avec la surface terrestre. De la figure 19 il s'ensuit que le rayon de ce cercle, ayant le point A pour centre, est égal à $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$.

Pour qu'un point quelconque M du plan appartienne à la zone d'audibilité, il faut et il suffit qu'il existe une telle position B de l'avion à partir de laquelle le son puisse atteindre le point M, c'est-à-dire que le point M appartienne au cercle considéré. Autrement dit, si l'on prend de tels cercles pour toutes les positions de l'avion, on obtient toute la zone d'audibilité.

Par conséquent, on est amené à résoudre le problème mathématique suivant. Soient une demi-droite l issue du point O et trois nombres positifs u, v, h ($u < v$). Soient, de plus, un point quelconque A de la demi-droite l et un nombre positif t tel que la longueur du segment OA est égale à vt. Désignons par K_A un cercle de centre A et de rayon $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$. Le problème se ramène donc à la détermination, sur un plan, d'un domaine rempli de t o u s

les cercles K_A correspondant à toutes les positions du point A sur la demi-droite l. Sur la figure 20 on a représenté plusieurs cercles de ce type et une ligne en pointillé limitant le domaine rempli de ces cercles, c'est-à-dire la ligne — *frontière* de la zone d'audibilité. De la figure 20 il s'ensuit que la frontière de la zone d'audibilité est l'*enveloppe* des cercles considérés.

2. ANGLE CARACTÉRISTIQUE

Examinons, pour commencer, le cas où $h = 0$, c'est-à-dire le cas où le mouvement s'effectue sur la surface terrestre, en d'autres termes, nous avons remplacé notre avion par une « automobile supersonique ». Dans ce cas le rayon $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$ du cercle K_A se réduit à ut et nous pouvons, donc, formuler le problème suivant. Traçons le cercle K_A de rayon ut ($u < v$) et de centre A situé sur la demi-droite l et distant de O de vt. Il s'agit de trouver dans un plan un domaine susceptible de contenir tous les cercles K_A.

La solution de ce problème est très simple. Il est facile de voir que tous les cercles K_A ont un centre de similitude commun O (étant donné que lorsque t varie, la distance $OA = vt$ et le rayon du cercle K_A égal à ut subissent des variations absolument identiques). Par conséquent, le domaine d'un plan susceptible de contenir tous les cercles K_A, c'est-à-dire la zone d'audibilité, forme dans le cas considéré l'*angle SOT*, ayant le point O pour sommet et formé par des tangentes communes à tous les cercles K_A (fig. 21). Nous pouvons donc constater que les côtés de l'angle SOT servent d'*enveloppe* pour les cercles considérés.

La demi-droite l est évidemment la bissectrice de l'angle SOT. La moitié de l'angle SOT, c'est-à-dire l'angle φ formé par la demi-droite l et l'une des demi-droites OS ou OT, est appelée *angle caractéristique* ou *angle de Mach*

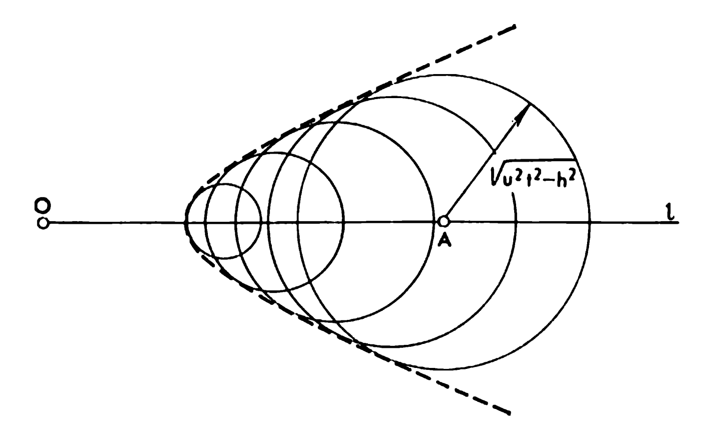


Fig. 20

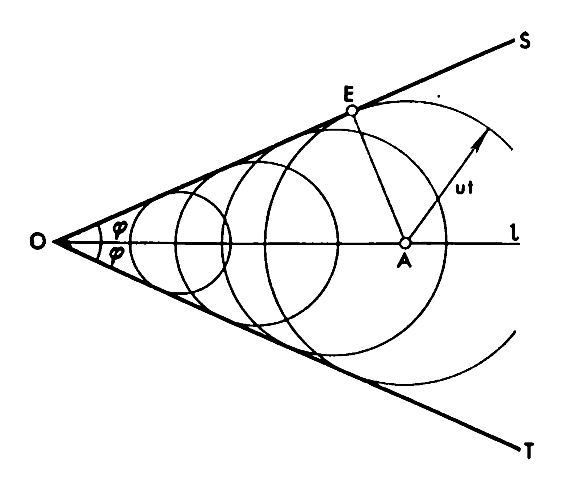


Fig. 21

pour l'« automobibe supersonique » considérée *). Etant donné que pour le triangle OAE, représenté sur la fig. 21, on a $OA = vt$, $AE = ut$, $OE = \sqrt{(vt)^2 - (ut)^2} = t\sqrt{v^2 - u^2}$, on obtient

$$\sin\varphi = \frac{AE}{OA} = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AE}{OE} = \frac{ut}{t\sqrt{v^2-u^2}} = \frac{u}{\sqrt{v^2-u^2}}. \qquad (16)$$

D'après ces formules, si l'on connaît les vitesses u, v, on peut déterminer la valeur de l'angle caractéristique.

3. DÉTERMINATION DE LA ZONE D'AUDIBILITÉ

Notons pour commencer que si, dans un système de coordonnées quelconque, le point A a pour coordonnées (α, β) et le point M, (x, y), on a (fig. 24)

$$MA^2 = AN^2 + NM^2 = PQ^2 + NM^2 = (OQ - OP)^2 + (QM - QN)^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2.$$

Il est facile de s'assurer que cette relation reste vérifiée pour toute autre position du point M, si, par exemple,

---

*) Bien entendu, on n'a parlé de l'automobile supersonique que pour faciliter l'assimilation des idées exposées — de telles automobiles n'existent pas pour le moment. Toutefois, la notion d'angle caractéristique examinée plus haut a un sens réel et on l'utilise largement dans la mécanique des fluides. Mais là au lieu d'envisager le mouvement d'une automobile supersonique dans un fluide au repos, on a recours à un objet immobile plongé dans un courant d'air supersonique stationnaire. La notion d'angle caractéristique devient évidente si l'on examine le mouvement d'un navire dans l'eau immobile (fig. 22); dans ce cas il ne s'agit pas de la propagation du son dans l'air, mais de la propagation des vagues sur la surface de l'eau (u étant la vitesse de propagation des vagues, v — vitesse du navire).

Un phénomène, découvert en 1934 par les physiciens soviétiques S. Vavilov et P. Tchérenkov, se rapporte également à ce problème. Il consiste en ce qui suit. Désignons par u la vitesse de propagation de la lumière dans un milieu homogène quelconque (dans un liquide transparent par exemple). Si une particule chargée se déplace dans ce milieu avec une vitesse $v > u$, il apparaît une luminescence, la lumière étant émise non pas dans toutes les directions, mais seulement dans des directions formant avec la trajectoire de la particule un angle aigu bien déterminé (fig. 23); l'angle φ représenté sur cette figure est déterminé d'après les formules (16). Cette luminescence représente donc l'effet de Vavilov-Tchérenkov.

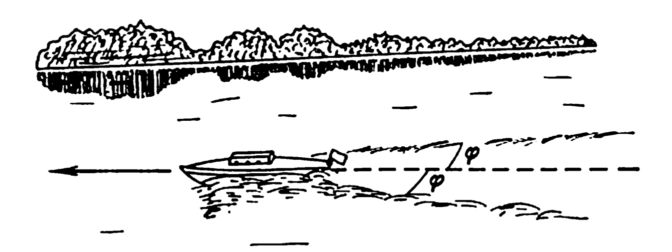


Fig. 22

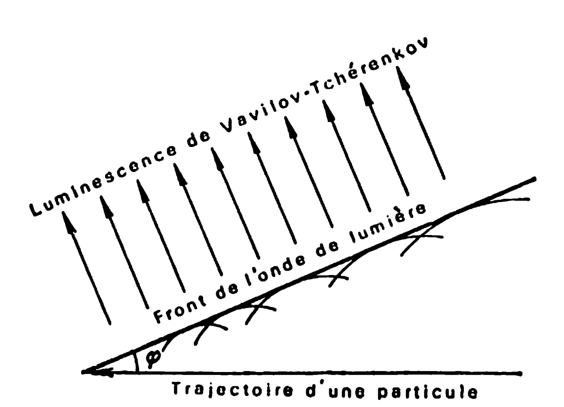


Fig. 23

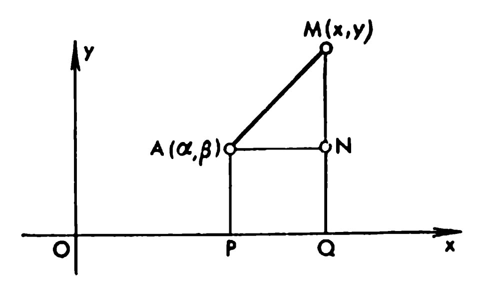


Fig. 24

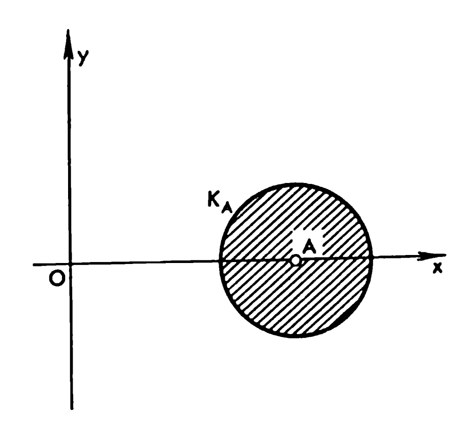


Fig. 25

on le place à gauche ou au-dessous du point A. On peut en conclure que *si un point M appartient à un cercle de centre A et de rayon R (C'est-à-dire $MA \leqslant R$), alors*

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leqslant R^2, \tag{17}$$

si le point M se trouve sur la circonférence de ce cercle, on a

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \tag{18}$$

Revenons maintenant à notre problème: déterminer la zone d'audibilité pour un avion en vol à l'altitude $h > 0$ au-dessus de la surface de la Terre.

Choisissons un système de coordonnées dont l'origine coïncide avec le point O, l'axe des abscisses est dirigé suivant la ligne l, l'axe des ordonnées étant perpendiculaire à cette dernière (fig. 25). Soit, comme auparavant, le point A appartenant à la demi-droite l et distant du point O de $OA = vt$. Pour que le point M de coordonnées x, y appartienne au cercle K_A de rayon $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$ et de centre A,

il faut et il suffit que soit vérifiée l'inégalité

$$(x - vt)^2 + y^2 \leqslant u^2t^2 - h^2,$$

obtenue de l'inégalité (17) en posant $\alpha = vt$, $\beta = 0$, $R = \sqrt{u^2t^2 - h^2}$, ou

$$(v^2 - u^2)\, t^2 - 2\, vxt + (x^2 + y^2 + h^2) \leqslant 0. \qquad (19)$$

Etant donné que tous les cercles K_A remplissent toute la zone d'audibilité, on peut affirmer que: le *point M de coordonnées x, y appartient à la zone d'audibilité si, et seulement si, il existe un nombre positif t vérifiant l'inégalité* (19). Démontrons à présent le lemme suivant qui nous permettra de comprendre l'inégalité (19).

● LEMME 1. *Soit le trinôme du second degré $at^2 + bt + c$, dont les coefficients a et c sont positifs. Pour qu'il existe un nombre positif t, vérifiant l'inégalité $at^2 + bt + c \leqslant 0$, il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions suivantes:*

1) $b < 0$,

2) *le discriminant du trinôme n'est pas négatif, c'est-à-dire*

$$b^2 - 4ac \geqslant 0.$$

● DÉMONSTRATION. Si la condition 1) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si $b \geqslant 0$, tous les trois termes figurant dans la somme $at^2 + bt + c$ sont non négatifs pour les t *positifs* (a et c étant positifs). Donc, pour les t positifs le trinôme $at^2 + bt + c$ n'admet que des valeurs *positives.* Si la condition 2) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si le nombre $b^2 - 4ac$ est négatif, le trinôme considéré n'admet également que des valeurs positives, car

$$at^2 + bt + c = a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a}(b^2 - 4ac).$$

Ainsi, si l'inégalité $at^2 + bt + c \leqslant 0$ a lieu pour un t positif quelconque, les deux conditions 1), 2) doivent être vérifiées.

Inversement, soient remplies les conditions 1), 2). Dans ce cas, en vertu de la condition 2), les racines du trinôme $at^2 + bt + c$ sont réelles et comme $a > 0$ et $c > 0$, le produit des racines est positif, c'est-à-dire les deux racines sont d'un même signe. De la condition 1) il découle que la somme des racines est positive et par suite *les deux racines le sont également*. Autrement dit, il existe un nombre positif t tel que $at^2 + bt + c = 0$, ce qu'il fallait démontrer. Le lemme est donc démontré.

On peut appliquer ce lemme au trinôme qui figure dans le premier membre de la relation (19) du fait que ses coefficients $a = v^2 - u^2$ et $c = x^2 + y^2 + h^2$ sont positifs. Ainsi, pour qu'il existe un nombre positif t, vérifiant l'inégalité (19) (c'est-à-dire pour que le point M appartienne à la zone d'audibilité), il faut et il suffit que les deux conditions suivantes

1) $2vx > 0$, ou $x > 0$;

2) le discriminant est non négatif, c'est-à-dire

$$(2vx)^2 - 4\,(v^2 - u^2)\,(x^2 + y^2 + h^2) \geqslant 0$$

soient vérifiées. En se débarrassant des parenthèses dans cette dernière inégalité et en la divisant par le nombre positif $4\,(v^2 - u^2)\,h^2$, on peut la mettre sous la forme

$$\frac{x^2}{\frac{v^2 - u^2}{u^2}\,h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geqslant 1.$$

Désignant, enfin, $\frac{v}{u}h$ par c, on obtient

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geqslant 1. \qquad (20)$$

Il est à noter que $v > u$, d'où $c = \frac{v}{u}h > h$, autrement dit le nombre $c^2 - h^2$ est positif.

Ainsi, la *zone d'audibilité se compose de tous les points se trouvant à droite de l'axe Oy (c'est-à-dire vérifiant la condition $x > 0$), dont les coordonnées vérifient l'inégalité* (20).

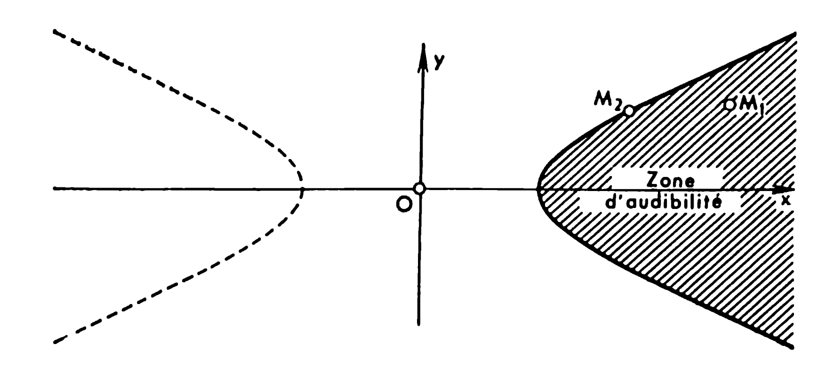


Fig. 26

Si les coordonnées x, y du point M satisfont à l'inégalité

$$\frac{x^2}{c^2-h^2}-\frac{y^2}{h^2}>1, \qquad (21)$$

on en déduit facilement que le point M se trouve *à l'intérieur* de la zone d'audibilité. En effet, tous les points disposés au voisinage du point M (c'est-à-dire les points, dont les coordonnées ne diffèrent que très peu de celles du point M) satisfont à leur tour à l'inégalité (21); autrement dit, le point M est entouré de tous les côtés par les points appartenant à la zone d'audibilité, ce qui signifie que le point M est intérieur à cette zone (point M_1 de la fig. 26). Si les coordonnées x, y du point M satisfont à la relation

$$\frac{x^2}{c^2-h^2}-\frac{y^2}{h^2}=1, \qquad (22)$$

le point M appartient à la frontière de la zone d'audibilité (point M_2 de la fig. 26). En effet, il suffit de faire varier,

d'une façon insignifiante, la coordonnée y en augmentant sa valeur absolue, pour que la condition (20) ne soit plus vérifiée, c'est-à-dire qu'on trouve des points aussi voisins que l'on veut du point M et qui n'appartiennent pas à la zone d'audibilité.

On arrive donc à la conclusion que les *points situés à droite de l'axe Oy, dont les coordonnées satisfont à l'inégalité* (21), *sont intérieurs à la zone d'audibilité, ceux vérifiant l'équation* (22) *appartiennent à la frontière de cette zone.*

Considérant dans un plan tous les points, dont les coordonnées satisfont à l'équation (22) et non pas spécialement ceux pour lesquels $x > 0$, nous obtiendrons non seulement la frontière de la zone d'audibilité, mais une courbe identique disposée à gauche de l'axe Oy et symétrique par rapport à ce dernier (courbe en pointillé de la fig. 26). Il est admis de les considérer non pas comme deux courbes différentes, mais comme deux parties ou, comme on dit plus souvent, deux branches d'une même courbe appelée *hyperbole* *).

Ainsi, nous avons démontré que la *zone d'audibilité a pour frontière la branche droite de l'hyperbole décrite par l'équation* (22). Il s'ensuit que la branche droite de l'hyperbole (22) est une enveloppe des cercles K_A (fig. 27), c'est-à-dire que chaque point M_0 de cette branche est point de contact de cette dernière avec un des cercles K_A **). Pour l'exposé ultérieur on aura besoin des formules permettant de rechercher celui des cercles K_A qui a un point de contact avec l'enveloppe M_0. Déduisons ces formules. Soit un point quelconque M_0 appartenant à la frontière de la zone d'audi-

---

*) La forme la plus usitée de l'équation de l'hyperbole est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Donc, pour l'hyperbole en question (22) les nombres a et b sont: $a = \sqrt{c^2 - h^2}, b = h$.

**) Dès maintenant on peut passer à la lecture du chapitre III ou même du chapitre IV.

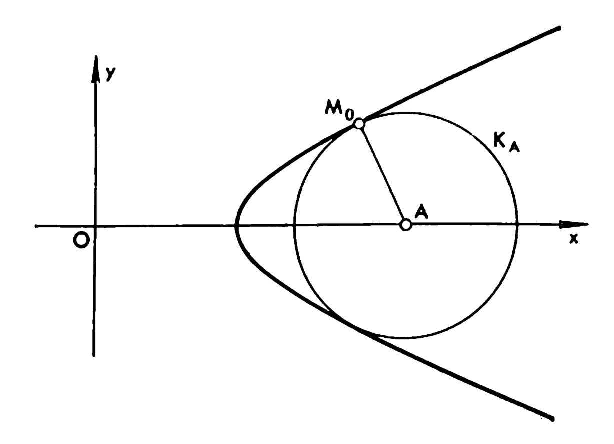


Fig. 27

bilité, c'est-à-dire à la branche droite de l'hyperbole (22). Désignons par x_0 et y_0 les coordonnées de ce point. Ces coordonnées satisfont à l'équation (22), car le point M_0 appartient à l'hyperbole, d'où on trouve

$$y_0^2 = h^2 \left(\frac{x_0^2}{c^2 - h^2} - 1 \right) ;$$

puis, en se servant de la formule $c = \frac{v}{u} h$, on obtient

$$x_0^2 + y_0^2 + h^2 = \frac{c^2 x_0^2}{c^2 - h^2} = \frac{v^2 x_0^2}{v^2 - u^2} . \qquad (23)$$

Comme le point M_0 appartient à la zone d'audibilité (il se trouve sur sa frontière), on peut trouver un cercle K_A contenant ce point, c'est-à-dire il existe un nombre positif t vérifiant l'inégalité (cf. (19)):

$$(v^2 - u^2) t^2 - 2 v x_0 t + (x_0^2 + y_0^2 + h^2) \leqslant 0,$$

ou, ce qui revient au même (cf. (23)), l'inégalité

$$(v^2-u^2)\,t^2-2vx_0t+\frac{v^2x_0^2}{v^2-u^2}\leqslant 0.$$

Cette dernière inégalité peut être récrite sous la forme

$$(v^2-u^2)\left[t-\frac{vx_0}{v^2-u^2}\right]^2\leqslant 0,$$

d'où il est aisé de voir qu'elle n'est satisfaite que pour une seule valeur de t, notamment,

$$t=\frac{vx_0}{v^2-u^2},$$

pour laquelle s'annule l'expression entre crochets. Ainsi, il n'existe qu'un seul cercle K_A contenant le point M_0, notamment celui de centre A et distant de O de

$$OA=vt=\frac{v^2x_0}{v^2-u^2}=\frac{c^2x_0}{c^2-h^2}. \qquad (24)$$

Le point considéré M_0 appartient à la circonférence de ce cercle K_A, car M_0 se trouve sur la frontière de la zone d'audibilité. Une hyperbole, limitant la zone d'audibilité, passe donc au-delà du cercle considéré K_A et a avec lui un point commun M_0, c'est-à-dire elle a un point de contact avec le cercle K_A en M_0.

4. CERTAINES PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLE

Traçons sur un même dessin une hyperbole (22) et les droites OS, OT inclinées par rapport à l'axe des abscisses sous un angle φ (cf. (16)). Nous allons montrer que *l'hyperbole toute entière est comprise entre les côtés des angles verticaux SOT et $S'OT'$* (fig. 28) *et qu'à mesure qu'on s'éloigne du point O l'hyperbole s'approche de plus en plus des droites SS' et TT'*. Pour démontrer cette proposition, supposons qu'une « automobile supersonique » se meuve avec une vitesse v et que, verticalement au-dessus d'elle, un avion

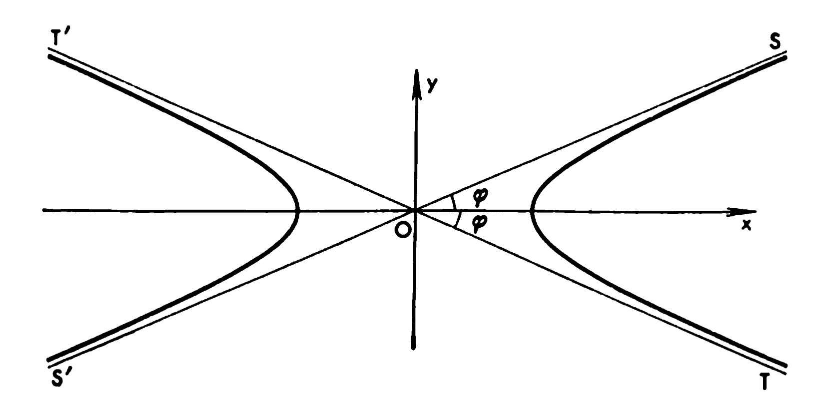


Fig. 28

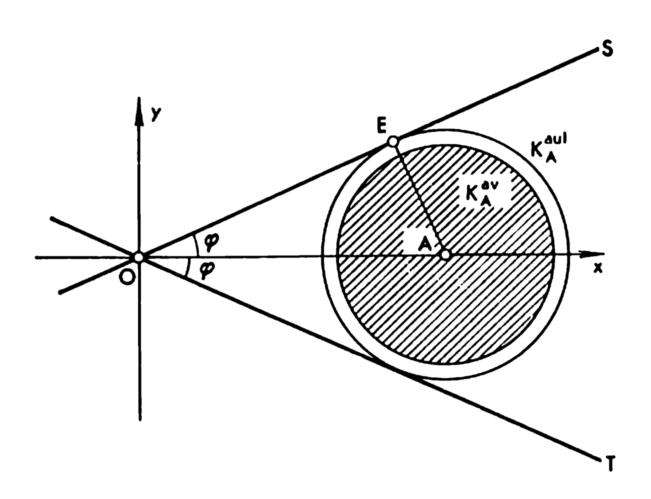


Fig. 29

se déplace avec la même vitesse v. Désignons par K_A^{aut} et K_A^{av} les cercles K_A se rapportant à l'automobile et à l'avion respectivement. Examinons à présent les cercles K_A^{aut} et K_A^{av}, ayant pour centre le même point A distant de O de $OA = vt$. Etant donné que le rayon $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$ du cercle K_A^{av} est, évidemment, plus petit que le rayon ut du cercle K_A^{aut}, il s'ensuit que le cercle K_A^{av} se trouve disposé à l'intérieur du cercle K_A^{aut} et toute la zone d'audibilité de l'avion est donc intérieure à la zone d'audibilité de l'automobile. Donc, la branche de droite de l'hyperbole (22) se trouve à l'intérieur de l'angle SOT (fig. 28); la branche de gauche, symétrique de la branche de droite, est disposée à l'intérieur de l'angle $S'OT'$. Poursuivons,

$$ut - \sqrt{u^2t^2 - h^2} = \frac{h^2}{ut + \sqrt{u^2t^2 - h^2}} < \frac{h^2}{ut}.$$

Ainsi, la différence des rayons des cercles K_A^{aut} et K_A^{av} devient de plus en plus petite lorsque t croît (c'est-à-dire quand le point A s'éloigne du point O), ce qui signifie que l'hyperbole se rapproche de plus en plus des droites OS, OT (fig. 29).

Les droites SS' et TT' sont appelées *asymptotes* de l'hyperbole.

Etablissons à présent l'équation d'une droite *tangente* à l'hyperbole. Soit M_0 un point quelconque situé sur la branche de droite d'une hyperbole. Désignons par x_0 et y_0 les coordonnées de ce point. Comme nous avons vu plus haut, le cercle K_A de centre au point A déterminé par la formule (24) a un point de contact avec l'hyperbole (22) en M_0 (fig. 30). Mais dans ce cas une tangente au cercle K_A au point M_0 est en même temps une tangente à l'hyperbole. Etant donné qu'on sait bien construire la tangente à un cercle, on a trouvé donc un procédé de construction d'une tangente à l'hyperbole.

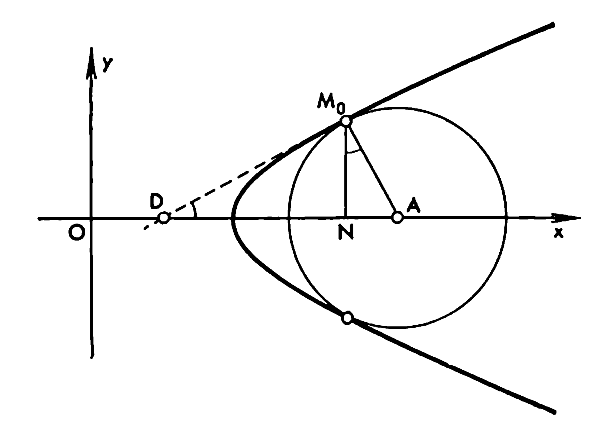


Fig. 30

Ecrivons l'équation de cette tangente. A cet effet désignons par D le point d'intersection d'une tangente et de l'axe des abscisses et examinons le triangle ADM_0. En abaissant du point M_0 la perpendiculaire M_0N sur l'axe des abscisses, on trouve que $\widehat{ADM_0} = \widehat{NM_0A}$, d'où (cf. (24))

$$\operatorname{tg} \widehat{ADM_0} = \operatorname{tg} \widehat{NM_0A} = \frac{NA}{NM_0} = \frac{OA - ON}{NM_0} =$$

$$= \frac{\frac{c^2 x_0^2}{c^2 - h^2} - x_0}{y_0} = \frac{h^2 x_0}{(c^2 - h^2)\, y_0}.$$

Si l'on met l'équation de la tangente recherchée sous la forme $y = kx + b$, le coefficient angulaire k sera égal à la tangente de l'angle ADM_0 formé par la tangente avec l'axe des abscisses. Nous venons de calculer la valeur de cette tangente. Donc, l'équation de la tangente est de

la forme

$$y = \frac{h^2 x_0}{(c^2 - h^2)\, y_0}\, x + b.$$

Il reste à déterminer la valeur de l'ordonnée initiale b. Etant donné que la tangente passe par le point M_0, les coordonnées de ce point doivent satisfaire à l'équation de la tangente, c'est-à-dire

$$y_0 = \frac{h^2 x_0^2}{(c^2 - h^2)\, y_0} + b,$$

d'où

$$b = -\frac{h^2}{y_0}\left(\frac{x_0^2}{c^2 - h^2} - \frac{y_0^2}{h^2}\right).$$

Le point M_0 appartenant l'hyperbole (cf. (22)), l'expression entre parenthèses est égale à l'unité. Définitivement, on a

$$b = -\frac{h^2}{y_0},$$

l'équation de la tangente prend donc la forme suivante:

$$y = \frac{h^2 x_0}{(c^2 - h^2)\, y_0}\, x - \frac{h^2}{y_0}.$$

Enfin, en multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par $\frac{y_0}{h^2}$, on obtient l'équation de la tangente sous une forme facile à retenir (comp. l'équation de l'hyperbole (22)):

$$\frac{x_0 x}{c^2 - h^2} - \frac{y_0 y}{h^2} = 1. \qquad (25)$$

Rappelons que la formule (25) est l'*équation d'une droite tangente à l'hyperbole au point M_0 de coordonnées x_0, y_0.*

Ecrivons maintenant les équations des asymptotes, ce qui nous permettra par la suite d'établir deux propriétés très intéressantes de l'hyperbole. Le coefficient angulaire

k de la droite $S'S$ est égal à $\operatorname{tg} \varphi$, c'est-à-dire (cf. (16))

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{u^2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{h^2} - 1}} = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}},$$

tandis que l'ordonnée initiale b est nulle, car cette droite passe par l'origine des coordonnées. L'équation de l'asymptote $S'S$ prend alors la forme

$$y = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}} x. \tag{26}$$

La droite $T'T$ forme avec l'axe des abscisses le même angle que la droite $S'S$ mais ses ordonnées sont de signe contraire en comparaison des ordonnées des points de cette dernière. L'équation de la droite $T'T$ est alors de la forme

$$y = -\frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}} x. \tag{27}$$

Soit maintenant M_0 un point quelconque de l'hyperbole; désignons par x_0, y_0 ses coordonnées. Menons par le point M_0 une tangente à l'hyperbole et notons par P_1 et P_2 les points d'intersection de cette tangente avec les asymptotes (fig. 31). Le problème est de trouver les coordonnées des points P_1 et P_2. Désignons par x_1, y_1 les coordonnées du point P_1. Etant donné que ce point appartient à l'asymptote $S'S$, ses coordonnées doivent satisfaire à l'équation (26), c'est-à-dire

$$y_1 = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}} x_1. \tag{28}$$

Comme le point P_1 est également situé sur la tangente, ses coordonnées doivent vérifier l'équation (25), c'est-à-dire

$$\frac{x_0 x_1}{c^2 - h^2} - \frac{y_0 y_1}{h^2} = 1. \tag{29}$$

Enfin, le point M_0 appartient à l'hyperbole, alors (cf. (22)):

$$\frac{x_0^2}{c^2 - h^2} - \frac{y_0^2}{h^2} = 1. \tag{30}$$

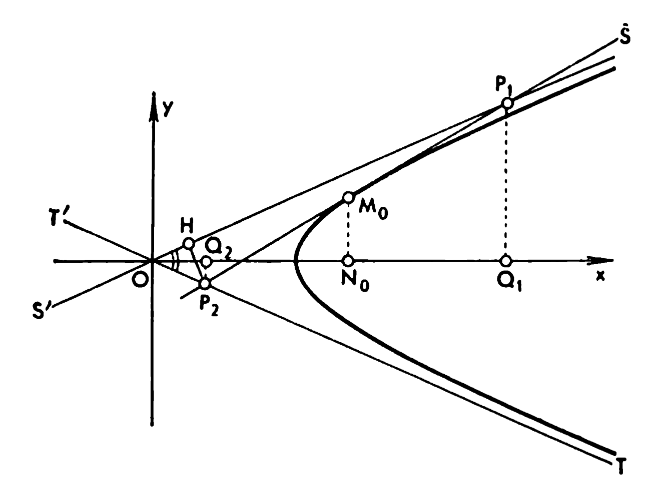


Fig. 31

De ces trois dernières relations il est facile de déterminer les coordonnées du point P_1. Notamment, substituant dans l'équation (29) à y_1 sa valeur tirée de (28), on obtient

$$\frac{x_1}{\sqrt{c^2-h^2}}\left(\frac{x_0}{\sqrt{c^2-h^2}}-\frac{y_0}{h}\right)=1.$$

Ensuite en multipliant les deux membres de cette relation par $\frac{x_0}{\sqrt{c^2-h^2}}+\frac{y_0}{h}$ et en utilisant la formule (30), on a

$$\frac{x_1}{c^2-h^2}=\frac{x_0}{\sqrt{c^2-h^2}}+\frac{y_0}{h},$$

d'où

$$x_1=x_0+y_0\frac{\sqrt{c^2-h^2}}{h}. \qquad (31)$$

D'une façon analogue on peut calculer l'abscisse x_2 du point P_2:

$$x_2 = x_0 - y_0 \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{h} . \tag{32}$$

Des relations (31) et (32) on obtient

$$x_1 - x_0 = x_0 - x_2, \tag{33}$$

$$x_1 x_2 = x_0^2 - y_0^2 \frac{c^2 - h^2}{h^2} = (c^2 - h^2)\left(\frac{x_0^2}{c^2 - h^2} - \frac{y_0^2}{h^2}\right) = c^2 - h^2 \tag{34}$$

(cf. (30)).

Menons par les points P_1, M_0, P_2 les perpendiculaires P_1Q_1, M_0N_0, P_2Q_2 à l'axe des abscisses. Alors $N_0Q_1 = OQ_1 - ON_0 = x_1 - x_0$, $Q_2N_0 = ON_0 - OQ_2 = x_0 - x_2$, et de l'équation (33) il découle que $N_0Q_1 = Q_2N_0$, c'est-à-dire que N_0 est le milieu du segment Q_2Q_1. D'où (étant donné que les segments P_1Q_1, M_0N_0, P_2Q_2 sont parallèles) il s'ensuit que M_0 est le milieu du segment P_1P_2. Ainsi, le *segment d'une tangente à l'hyperbole, compris entre les asymptotes, est partagé par le point de contact en deux parties égales.*

Donnons maintenant l'interprétation géométrique de la relation (34). Calculons pour cela l'aire du triangle OP_1P_2. Menons par le point P_2 la perpendiculaire P_2H à la droite SS'. Alors l'aire S_Δ du triangle OP_1P_2 s'exprime comme suit:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} OP_1 \cdot P_2H = \frac{1}{2} OP_1 \cdot (OP_2 \cdot \sin 2\varphi) =$$
$$= \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left(\frac{OQ_1}{\cos\varphi}\right)\left(\frac{OQ_2}{\cos\varphi}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos^2\varphi} \cdot x_1 x_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos^2\varphi} (c^2 - h^2).$$

(cf. (34)). Ainsi, *toute tangente à l'hyperbole découpe dans l'angle formé par les asymptotes un triangle de l'aire constante,*

à savoir

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos^2 \varphi} (c^2 - h^2).$$

(Pour les lecteurs initiés à la trigonométrie rien n'est plus simple que de faire les transformations suivantes

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}},$$

d'où

$$S_\Delta = h \sqrt{c^2 - h^2}).$$

III. ASTROÏDE ET CYCLOÏDE

1. CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION

Dans ce petit chapitre nous poursuivrons l'étude des enveloppes en examinant deux courbes fort intéressantes : astroïde et cycloïde. Pour cela nous aurons recours à la notion de *centre instantané de rotation* qui joue un rôle important en mécanique.

Considérons une figure plane invariable, découpée en carton par exemple, qui est animée d'un mouvement de rotation, c'est-à-dire un tel déplacement de notre figure sur un plan pour lequel un point quelconque O (centre de rotation) reste immobile à tout instant, tandis que la figure elle-même tourne autour du point O (fig. 32). Tout point A d'une figure en mouvement, autre que O, décrit une circonférence. A tout instant, la vitesse v du point A est dirigée suivant la tangente à cette circonférence, c'est-à-dire elle est normale au segment OA (fig. 33).

On considère en mécanique (et on peut le démontrer mathématiquement) qu'une figure se déplaçant arbitrairement sur un plan est animée à tout instant t, pris séparément, d'un « mouvement instantané » qui est un *mouvement progressif rectiligne* avec une « vitesse instantanée » quelconque, ou bien une *rotation* autour d'un certain point, dit « centre instantané de rotation ». Le point O, étant le centre instantané de rotation, reste immobile à un instant donné (c'est-à-dire sa vitesse est nulle), tandis que tout point A de cette figure en mouvement, autre que O, a, à cet instant, une vitesse non nulle et perpendiculaire au segment OA. Donc, le centre instantané de rotation est le s e u l point d'une figure en mouvement, dont la vitesse à un instant donné est nulle, c'est-à-dire l'unique « point instantané de repos ».

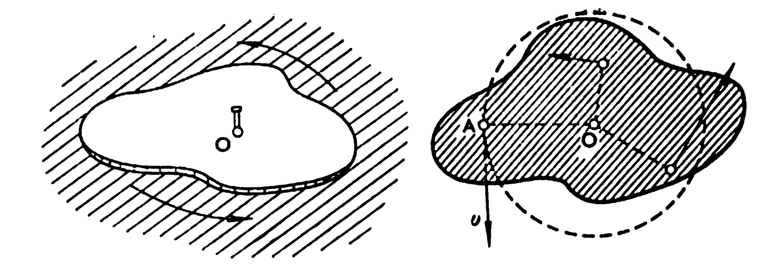


Fig. 32

Fig. 33

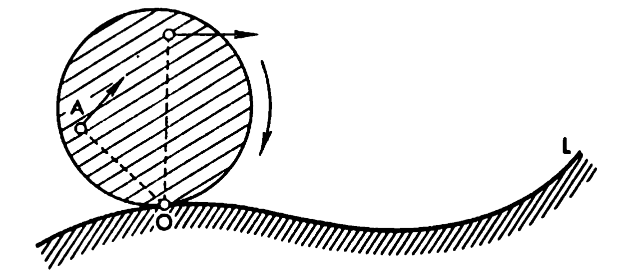


Fig. 34

Soit, par exemple, un cercle (ou une autre figure arbitraire) qui roule sans glisser sur un plan suivant une courbe quelconque L (fig. 34). Le terme « roule » signifie que le cercle se déplace sur un plan et à chaque instant il est en contact avec la courbe L. L'expression « rouler sans glisser » signifie que le point de contact du cercle mobile (roulante) avec la courbe L ne glisse pas sur cette courbe, c'est-à-dire que ce point possède une vitesse nulle et devient, donc, centre instantané de rotation. Nous pouvons en conclure que *si un cercle roule sans glisser sur une courbe immobile L, le point de contact du cercle avec la courbe L est à chaque instant un centre instantané de rotation; si l'on note par O ce point de contact, tout point arbitraire A du cercle mobile possède, à l'instant considéré, une vitesse instantanée perpendiculaire au segment OA.*

2. ASTROÏDE

Prenons pour courbe L une circonférence de rayon R quelconque et examinons un cercle de rayon $^1/_4 R$, roulant sans glisser du côté intérieur de la circonférence L. Désignons par A un point quelconque appartenant à la circonférence du cercle mobile et examinons la *trajectoire du mouvement* du point A, c'est-à-dire la courbe décrite par ce point lors du roulement du cercle. Si, par exemple, à l'instant initial le point A se trouve sur la circonférence L (fig. 35, position I de la roulante), puis il se déplace à l'intérieur de la circonférence L (positions II, III) pour revenir à la circonférence L (position IV). En définitive, le point A décrira un arc situé à l'intérieur de la circonférence L et dont les extrémités s'appuient sur cette circonférence (pointillé sur la fig. 35). Il est évident que les extrémités de cet arc renferment justement un quart de la circonférence L, car la longueur de la circonférence L est quatre fois celle de la roulante. Lors du roulement ultérieur du cercle le point A décrira le deuxième arc semblable interceptant

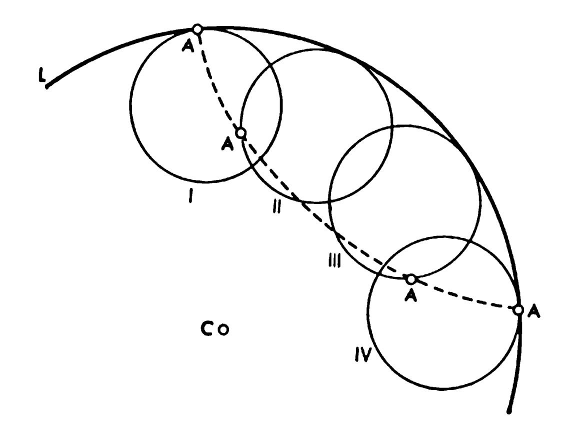


Fig. 35

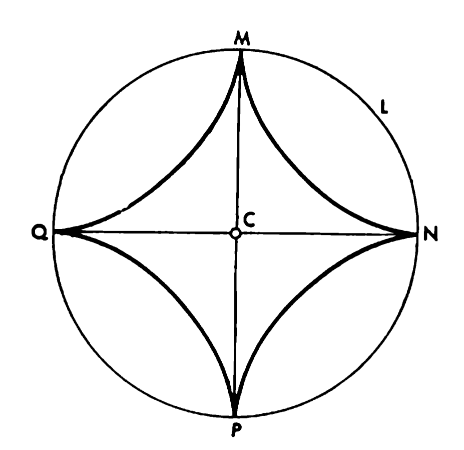


Fig. 36

un quart de la circonférence, puis le troisième et, enfin, le quatrième. En revenant à sa position initiale le point A décrira une courbe fermée à quatre pointes (sommets) inscrite dans la circonférence L (fig. 36). Cette courbe est appelée *astroïde*. En joignant tous les deux sommets opposés de l'astroïde, on obtient deux diamètres perpendiculaires PM et QN de la circonférence L, qui divisent l'astroïde en quatre arcs égaux.

Examinons à présent une position quelconque du cercle mobile et le point correspondant A de l'astroïde (fig. 37). Désignons comme toujours par O le point de contact de la roulante avec la circonférence L. On comprend aisément que l'arc MO de la circonférence L a une même longueur que l'arc AO de la roulante: du fait qu'à la position initiale du cercle roulant toujours sans glisser le point A coïncidait avec M. Menons les rayons CM, CO, CN issus du centre C de la circonférence. Il est évident que le rayon CO passe par le centre du cercle mobile et coupe sa circonférence en un point D, diamétralement opposé au point de contact O. Etant donné que le rayon du cercle mobile est égal à $1/4R$, on obtient $CD = DO = 1/2R$. A cet instant de roulement du cercle, le centre instantané de rotation se confond avec le point O et la vitesse du mouvement du point A, décrivant l'astroïde, est perpendiculaire au segment OA. Mais la vitesse du mouvement d'un point est toujours tangente à la trajectoire qu'il décrit. D'où l'on déduit aisément que la perpendiculaire au segment OA, passant par le point A, est une tangente à l'astroïde au point A. Cette perpendiculaire passe évidemment par le point D (car l'angle OAD est un angle inscrit interceptant le diamètre). Donc, AD est une tangente à l'astroïde. Désignons par E et F les points d'intersection de cette tangente avec les rayons CM et CN.

Désignons, enfin, par α l'angle MCO. Etant donné que l'arc MO est intercepté par l'angle au centre α, l'arc AO d'une même longueur est intercepté dans une circonférence

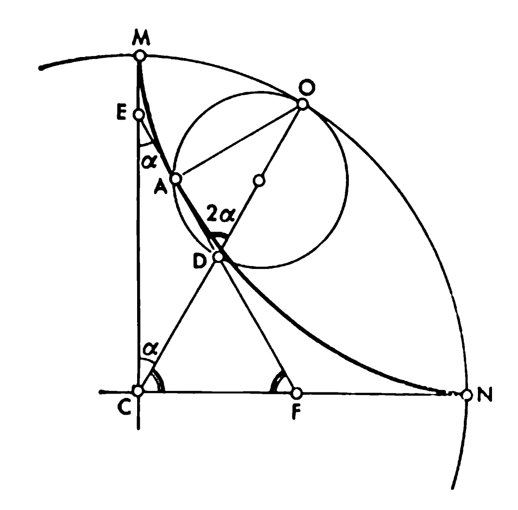


Fig. 37

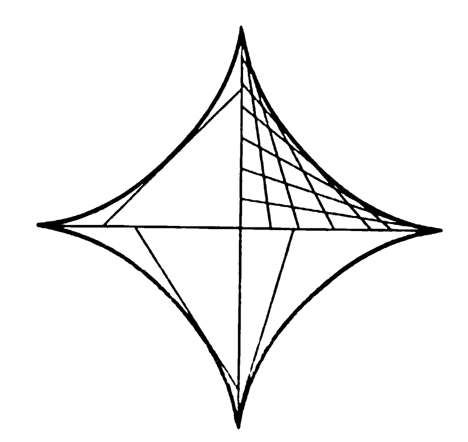


Fig. 38

de rayon quatre fois moindre par l'angle au centre 4α, on en conclut que l'angle inscrit ADO, interceptant le même arc AO, est égal à 2α. Du triangle CDE on obtient : $\widehat{CED} = \alpha$ et du triangle CDF: $\widehat{DCF} = \widehat{DFC} = 90° - \alpha$. Par conséquent, les triangles CDE et CDF sont isocèles, c'est-à-dire $ED = CD = DF = 1/2R$, d'où $EF = R$. Ainsi, le *segment* EF *de la tangente à l'astroïde, compris entre les droites* CM *et* CN, *est égal au rayon* R *de la circonférence* L. Comme $\widehat{CEF} = \alpha$ et l'angle α varie, pour un cercle roulant sur l'arc MN, de 0° à 90°, ce procédé permet, donc, de construire tout segment EF de longueur R et dont les extrémités se trouvent sur les côtés de l'angle MCN. Autrement dit, l'*astroïde est en contact avec tous les segments rectilignes de longueur* R *et dont les extrémités sont situées sur les deux droites perpendiculaires* MP *et* NQ, c'est-à-dire l'astroïde est une *enveloppe* de tous ces segments (fig. 38).

Dans le chapitre IV (voir page 87) nous reviendrons à la notion d'astroïde pour déduire son équation.

3. CYCLOÏDE

Considérons à présent un cercle de rayon r roulant sans glisser sur la droite L. Le point A, appartenant à la circonférence du cercle roulant, décrit alors une courbe appelée cycloïde (fig. 39). Chaque « arche » de cycloïde renferme entre ses extrémités un segment de la droite L de longueur $2\pi r$.

Examinons une position quelconque du cercle roulant et le point correspondant A de la cycloïde. Désignons par O le point de contact du cercle avec la droite L et par D le point de la circonférence diamétralement opposé. A cet instant du roulement du cercle le centre instantané de rotation vient en O, la vitesse du mouvement du point A, qui

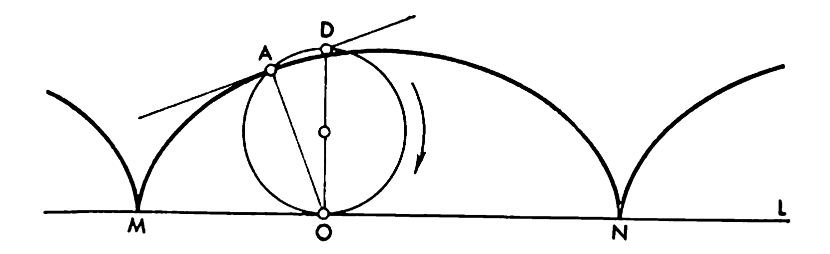


Fig. 39

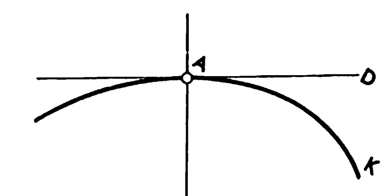


Fig. 40

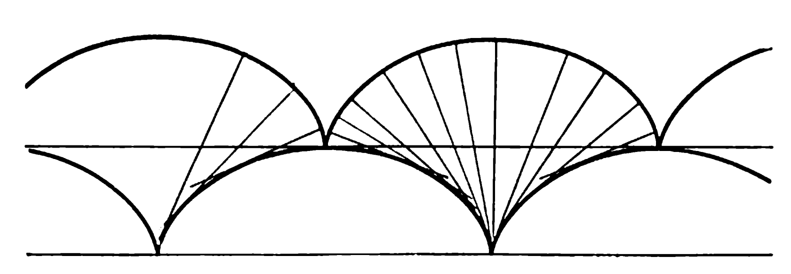


Fig. 41

décrit la cycloïde, est dirigée perpendiculairement au segment OA, c'est-à-dire suivant la droite AD. Du fait que la vitesse du mouvement est toujours dirigée tangentiellement à la trajectoire décrite par un point, il s'ensuit que la *droite AD est tangente à la cycloïde au point A*.

Soient K une courbe quelconque, A un de ses points, AD la tangente à la courbe K au point A (fig. 40). Une droite passant par le point A et perpendiculaire à la tangente AD est appelée *normale* à la courbe K au point A. De la figure 39 il s'ensuit que la normale à la cycloïde au point A est la droite AO.

Notons, de plus, que la longueur du segment MO est égale à celle de l'arc AO de la circonférence, le roulement s'effectuant sans glissement.

Etablissons maintenant une propriété importante de la cycloïde. Examinons deux cycloïdes représentées sur la fig. 41. Nous allons démontrer que *toute normale à la cycloïde supérieure est tangente à celle inférieure* (et inversement, toute tangente à la cycloïde inférieure est normale à la supérieure). Autrement dit, la cycloïde inférieure est une *enveloppe* des normales à la cycloïde supérieure. Si l'on mène les normales à une courbe quelconque K en tous ses points, l'enveloppe de toutes ces normales est dite *développée* de la courbe K (fig. 42). La propriété de la cycloïde que nous venons de formuler signifie que la *développée d'une cycloïde est donc une cycloïde égale à la première mais décalée*: la développée de la cycloïde supérieure, représentée sur la fig. 41, est celle inférieure.

Démontrons cette propriété de la cycloïde. Examinons une certaine position d'un cercle dont le roulement sur la droite L forme la cycloïde supérieure (fig. 43). Les symboles A, O et D ont le même sens que pour la fig. 39. Construisons un autre cercle, symétrique du premier par rapport au point O. Soient A' et D' les points symétriques des points A et D. Alors le segment MO est d'une même longueur que l'arc OA, le segment MC est d'une même longueur (égale à

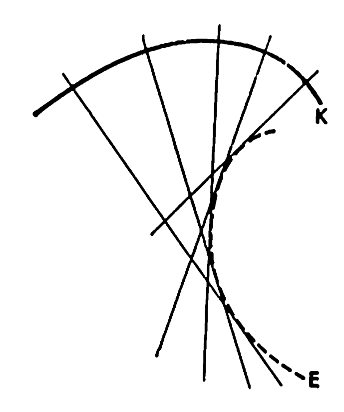


Fig. 42

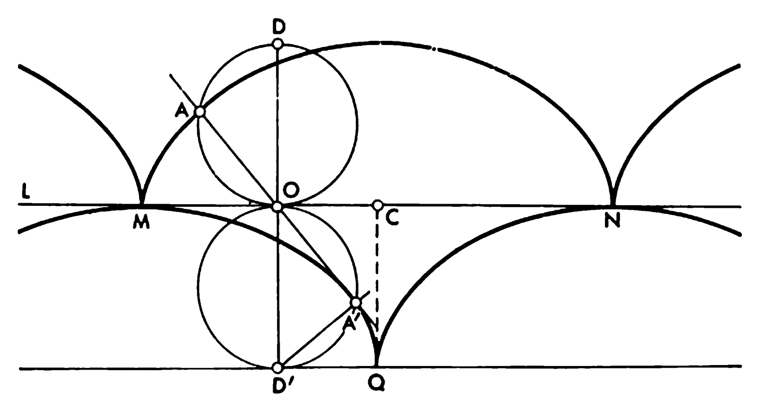


Fig. 43

πr) que la demi-circonférence OD; par conséquent, le segment OC est d'une même longueur que l'arc AD. Autrement dit, le segment $D'Q$ est d'une même longueur que l'arc $D'A'$. Mais cela signifie que le point A' appartient à la cycloïde inférieure et le cercle inférieur, représenté sur la fig. 43, correspond exactement à ce point A'. Des propriétés démontrées des tangentes et des normales il s'ensuit (vu que D' est le centre instantané de rotation lors du roulement de cercle sur la droite L') que OA' est la tangente et $A'D'$ la normale à la cycloïde inférieure. Etant donné que les segments OA et OA' sont le prolongement l'un de l'autre, on comprend aisément que toute normale AA' à la cycloïde supérieure est une tangente à celle inférieure.

IV. ENVELOPPES

1. FAMILLES DE COURBES ET LEURS ENVELOPPES

Après avoir passé en revue les problèmes des chapitres I, II et III nous allons à présent signaler les faits qu'on découvre en examinant les figures 10, 20, 21, 38, 41. Dans tous ces cas on a une infinité de courbes ou, comme on dit, une *famille de courbes* — *famille de paraboles* dans le premier cas, *famille de circonférences* dans les deuxième et troisième cas et, enfin, *famille de droites* dans les deux derniers cas (les dessins représentent naturellement non pas toutes les courbes d'une même famille, leur nombre étant illimité, mais seulement quelques-unes d'entre elles). Dans tous les cas les courbes de la famille en question occupent un certain domaine d'un plan (zone de tir pour le premier chapitre, zone d'audibilité pour le deuxième), la courbe limitant ce domaine étant en chaque point tangente à une des courbes de la famille, dite enveloppée. Cette courbe est appelée *enveloppe*. Ainsi, sur la fig. 10 on a tracé une famille de paraboles qui représentent des trajectoires d'obus. L'enveloppe de cette famille de courbes (la parabole de sûreté) est en chaque point tangente à l'une des courbes enveloppées de la famille, c'est-à-dire à l'une des trajectoires des obus. La fig. 20 nous donne une famille de circonférences. L'enveloppe de cette famille de courbes (une branche de l'hyperbole) est, en chaque point, tangente à l'une des courbes de notre famille, c'est-à-dire à l'une des circonférences.

D'une façon générale, *étant donné une famille de courbes, on appelle enveloppe de cette famille une courbe dont chaque point est un point de contact d'une enveloppée de la famille donnée.* Considérons quelques exemples fort simples. Examinons la famille de courbes composées des circonférences de même rayon R et dont les centres se trouvent sur une droite donnée l (fig. 44). L'enveloppe de cette famille

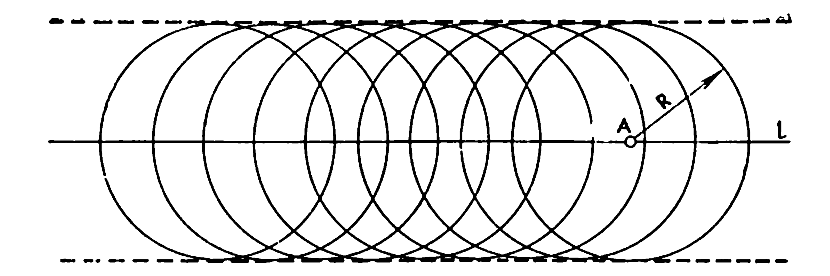


Fig. 44

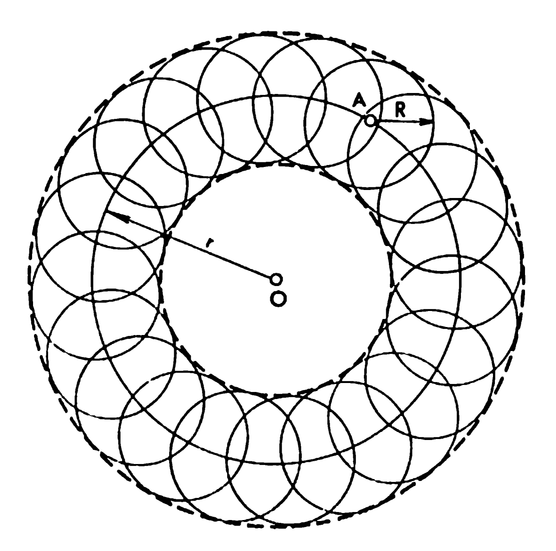


Fig. 45

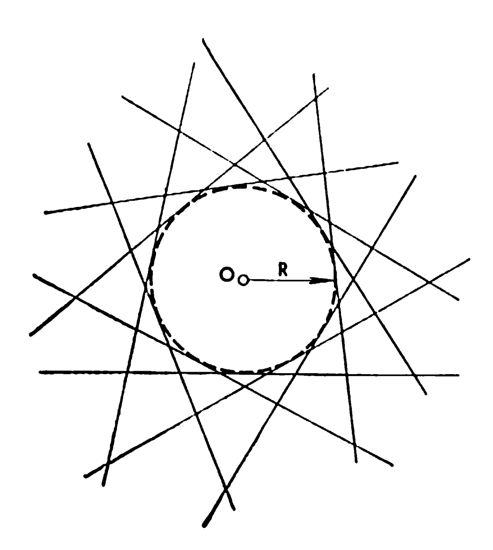


Fig. 46

est évidemment formée des deux droites parallèles distantes de l d'une longueur R. De même, si l'on prend une famille de cercles de rayon R et dont les centres appartiennent à une circonférence O de rayon r, alors (pour $r > R$) l'enveloppe de cette famille se compose de deux circonférences de rayons $r + R$ et $r - R$ (fig. 45).

Un dernier exemple. Examinons la famille de toutes les droites situées à une même distance R d'un point donné O (fig. 46). On comprend aisément que l'enveloppe d'une telle famille de droites est la circonférence de rayon R et de centre O.

2. ÉQUATION D'UNE FAMILLE DE COURBES

On cherche maintenant à déduire les équations des familles de courbes. Pour cela examinons plus en détail les exemples cités ci-dessus.

Revenons à une famille de circonférences de rayon R et dont les centres appartiennent à une même droite l (voir fig. 44). Prenons l pour axe des abscisses d'un système de coordonnées et menons l'axe des ordonnées qui lui est perpendiculaire. Soit A un point quelconque de la droite l; désignons par α son abscisse (son ordonnée étant évidemment nulle). De la formule (18) il s'ensuit qu'une circonférence de rayon R et de centre A est définie par l'équation

$$(x-\alpha)^2+y^2=R^2$$

(que l'on obtient à partir de (18) en y posant $\beta=0$) ou, ce qui revient au même, par l'équation

$$x^2+y^2-2\alpha x+\alpha^2-R^2=0. \tag{35}$$

Le nombre α fait partie de l'équation (35). Chaque valeur de α donne une des circonférences de la famille, en particulier, celle dont le centre se trouve au point d'abscisse α. En faisant décrire à α toutes les valeurs possibles et en traçant les circonférences ainsi obtenues, on reçoit toute la famille de circonférences considérée. De ce fait, l'égalité (35) est appelée *équation de cette famille de circonférences.* La quantité α qui fait partie, tout comme les coordonnées x et y, de l'équation (35) est appelée *paramètre.*

Examinons à présent les circonférences K_A que nous avons étudiées dans le chapitre II (voir fig. 20). Prenons une de ces circonférences; son centre coïncide avec le point A d'abscisse vt et son rayon est égal à $\sqrt{u^2t^2-h^2}$. Désignant par α le nombre vt $\left(\text{de sorte que } t=\frac{\alpha}{v}\right)$ et se rappelant que $\frac{u}{v}=\frac{h}{c}$ (cf. (20)), on obtient:

$$\sqrt{u^2t^2-h^2}=\sqrt{\frac{u^2}{v^2}\alpha^2-h^2}=\sqrt{h^2\left(\frac{\alpha^2}{c^2}-1\right)}\,.$$

Ainsi, le rayon de la circonférence centrée au point A d'abscisse α est égal à $\sqrt{h^2\left(\frac{\alpha^2}{c^2}-1\right)}$. Conformément à (18), l'équa-

tion de cette circonférence est de la forme

$$(x-\alpha)^2+y^2=h^2\left(\frac{\alpha^2}{c^2}-1\right),$$

ou, en se débarrassant des parenthèses,

$$x^2+y^2-2\alpha x+\alpha^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)+h^2=0. \qquad (36)$$

Pour chaque valeur de α cette équation donne l'une des circonférences de la famille considérée, représentée sur la fig. 20. De plus, en faisant décrire au paramètre α toutes les valeurs positives, on obtient toute la famille de circonférences considérée.

Les formules (35) et (36) nous amènent à la conclusion suivante: *une famille de courbes peut être donnée à l'aide d'une équation à trois inconnues x, y, α, où x et y sont les coordonnées des points de la courbe et α un paramètre (quantité auxiliaire); pour chaque valeur déterminée de α, cette équation donne l'une des courbes de la famille considérée; faisant décrire à α toutes les valeurs possibles et traçant chaque fois une courbe on obtient définitivement toute la famille de courbes recherchée.*

Convenons d'écrire l'équation d'une famille de courbes sous la forme

$$f(x,\ y,\ \alpha)=0, \qquad (37)$$

où $f(x, y, \alpha)$ représente le premier membre des égalités (35) ou (36), ou, enfin, de toute autre équation analogue. Dans ce qui suit nous n'examinerons que le cas où la fonction $f(x, y, \alpha)$ est un polynôme liant x, y et α.

Néanmoins, donner l'équation des familles de courbes sous la forme (37) ne convient pas toujours. Pour s'en convaincre et trouver un autre procédé, examinons les deux exemples suivants.

Considérons une famille de circonférences, représentée sur la fig. 45. Prenons le point O pour origine d'un système de coordonnées. Soit A un point quelconque situé sur la circonférence de rayon r et ayant pour centre l'origine des

coordonnées. Désignons par α, β ses coordonnées. Les nombres α et β satisfont alors à l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2. \tag{38}$$

Une circonférence de rayon R et de centre au point A doit vérifier, en vertu de (18), l'équation suivante:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \tag{39}$$

Les égalités (38), (39) déterminent justement la famille de circonférences considérée. Notamment, l'équation (39) donne une circonférence de rayon R et de centre quelconque; quant à la relation (38) elle exige que ce centre se trouve sur la circonférence de rayon r et de centre O. En supprimant les parenthèses et en reportant tous les termes dans le premier membre, on écrit les égalités (38) et (39) sous la forme

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0, \tag{40}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

Dans la première de ces égalités figurent, en plus des coordonnées x, y, deux paramètres α, β, qui sont liés par la deuxième égalité. C'est précisément sous cette forme que nous allons examiner l'équation de notre famille de circonférences *).

Un dernier exemple. Examinons les trajectoires des obus dont on a parlé dans le premier chapitre (voir fig. 10). En désignant respectivement par α et β les composantes horizontale et verticale de la vitesse initiale et par y (au lieu de h) la hauteur du vol d'un obus, nous pouvons décrire le

---

*) Notons qu'en résolvant la deuxième des équations (40) en fonction de β et en reportant la valeur obtenue dans la première de ces égalités on pourrait obtenir une équation à un paramètre α, c'est-à-dire une équation de la forme (37). Mais les égalités (40) sont plus commodes, car elles ne comportent ni racines ni signes doubles qui apparaissent si l'on y substitue $\beta = \pm\sqrt{r^2 - \alpha^2}$.

mouvement d'un obus par les formules (cf. (3) et (4))

$$\begin{cases} x = \alpha t, \\ y = \beta t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

En tirant t de la première de ces relations et en le portant dans la deuxième, on obtient

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{gx^2}{2\alpha^2},$$

ou, après avoir multiplié par $2\alpha^2$ et reporté tous les termes dans le premier membre, il vient

$$gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2 y = 0.$$

La trajectoire du mouvement d'un obus est précisément décrite par cette équation. Etant donné que α et β sont les composantes de sa vitesse initiale v_0, alors (voir fig. 7)

$$\alpha^2 + \beta^2 = v_0^2.$$

Donc, la famille de trajectoires considérée est définie par les égalités suivantes:

$$gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2 y = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 - v_0^2 = 0, \qquad (41)$$

dont la première renferme, outre les coordonnées x, y, deux paramètres α, β, liés par la deuxième égalité.

Les formules (40) et (41) nous amènent à la conclusion suivante. *Une famille de courbes peut être donnée par deux équations*:

$$f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \qquad (42)$$

$$g(\alpha, \beta) = 0, \qquad (43)$$

dont la première comporte les coordonnées x, y et deux paramètres α, β, et la seconde lie ces deux paramètres entre eux; *choisissant convenablement les valeurs des paramètres α et β, satisfaisant à la relation* (43), *on obtient, à partir de l'équation* (42), *une des courbes de la famille considérée*; *faisant décrire à α et β toutes les valeurs possibles, qui vérifient l'égalité* (43), *on obtient toute la famille de courbes recherchée.*

D'une façon plus générale, si l'on veut définir une famille de courbes par l'équation

$$f(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 0, \tag{44}$$

comportant (outre x et y) m paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, il faut avoir, en outre, $m-1$ égalités

$$\begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 0, \\ g_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{m-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 0 \end{cases} \tag{45}$$

liant ces paramètres.

3. INTERSECTION DES COURBES D'UNE MÊME FAMILLE

Passons maintenant au problème suivant: comment, en connaissant l'équation d'une famille de courbes, trouver l'enveloppe de cette famille.

Soit C l'enveloppe d'une famille quelconque de courbes (fig. 47). Examinons une courbe quelconque L de cette famille. Elle a un point de contact avec l'enveloppe C (fig. 48) en un point T et est située d'un même côté de C *). Prenons sur l'enveloppe un point T', assez proche de T et désignons par L' une courbe de la famille qui a un point de contact avec l'enveloppe au point T'. Cette courbe L' passe à proximité de la courbe L. Si la courbe L', à proximité du point T, se trouvait entièrement située d'un même côté de L, alors les deux cas suivants pourraient se présenter: ou elle n'aurait aucun point commun avec l'enveloppe (L''), ou bien elle la couperait deux fois (L'''). Mais ces deux suppositions sont contradictoires, car la courbe L' a un point

---

*) Il est à noter qu'il existe des courbes qui ont les points de contact avec toutes les courbes d'une même famille mais en passant de part et d'autre de celles-ci (fig. 49). De telles courbes sont également rangées parmi les enveloppes. Pour ne pas nuire à la clarté de l'exposé nous faisons abstraction de ces cas, c'est-à-dire nous allons supposer que chaque courbe de la famille ait un point de contact avec l'enveloppe en se situant d'un même côté de cette dernière. Toutefois, on peut démontrer que le procédé de la détermination des enveloppes, que nous donnerons plus bas, a un caractère général (c.-à-d. qu'il permet de trouver également des enveloppes, dont la forme est représentée sur la fig. 49).

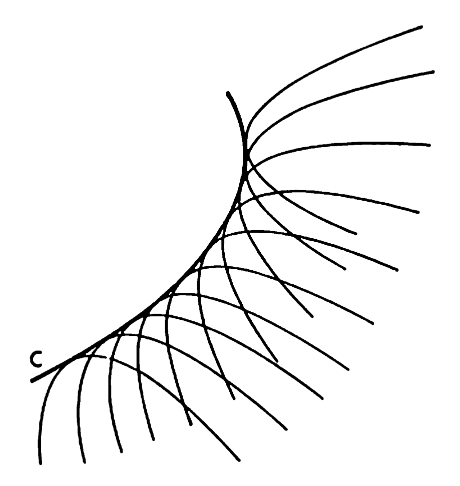


Fig. 47

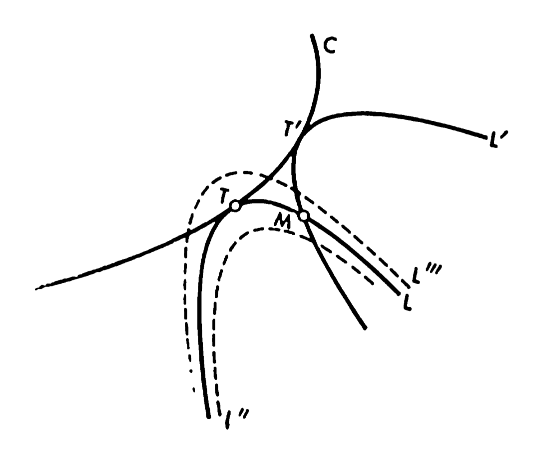


Fig. 48

de contact avec l'enveloppe. Donc, la courbe L' ne peut être entièrement située d'un même côté de L, c'est-à-dire qu'elle passe de part et d'autre de L. Cela signifie que les courbes L et L' se coupent en un certain point M.

Plus la courbe L' est proche de la courbe L, et plus le point M est proche de T (fig. 50). Autrement dit, pour trouver sur la courbe L un point T, où cette courbe soit tangente à l'enveloppe, il faut examiner les courbes L' de cette famille *de plus en plus voisines* de L; dans ce cas le point M, point d'intersection de L avec L', se rapproche de plus en plus du point cherché T. On exprime parfois ce fait comme suit: chaque point T de l'enveloppe est un point d'intersection de deux courbes « infiniment voisines » de la famille considérée.

Ces raisonnements jouent un rôle décisif pour la détermination de l'enveloppe. Nous le montrerons en prenant pour exemple une famille de circonférences, décrite par l'équation (35). Prenons deux circonférences L et L' de cette famille voisines l'une de l'autre. Désignons respectivement par α et α' les valeurs des paramètres qui correspondent à L et L'. La différence entre les nombres α et α' est insignifiante, car nous avons pris L et L' « voisines » (il faut se rappeler ici que α et α' sont les abscisses des centres des circonférences L et L'). Autrement dit, on peut écrire $\alpha' = \alpha + \varepsilon$, ε étant un nombre très petit en valeur absolue. Pour établir les équations des circonférences L et L', il faut que le paramètre qui figure dans l'équation (35) prenne les valeurs α et $\alpha + \varepsilon$:

$$\left.\begin{array}{ll} (L) & x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0, \\ (L') & x^2 + y^2 - 2(\alpha + \varepsilon)x + (\alpha + \varepsilon)^2 - R^2 = 0. \end{array}\right\} \quad (46)$$

Les points appartenant à la circonférence L vérifient la première équation et ceux appartenant à L' satisfont à la deuxième. Les points d'intersection de ces circonférences se trouvent aussi bien sur L que sur L' de sorte qu'ils satis-

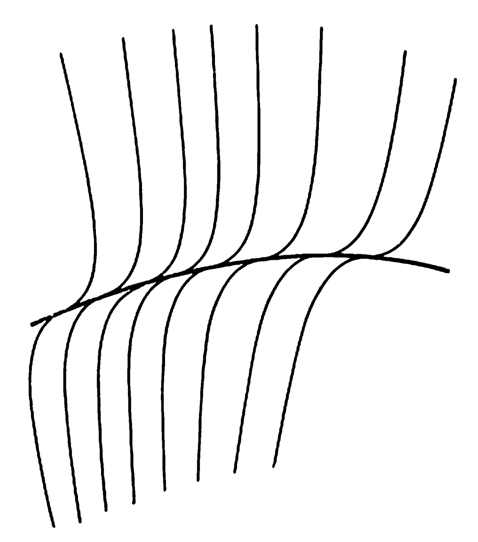


Fig. 49

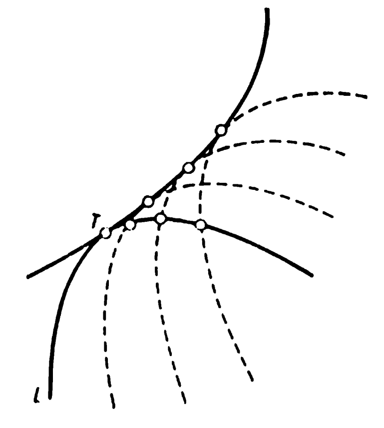


Fig. 50

font à deux équations données ci-dessus. Donc, pour trouver ces points d'intersection, il suffit de résoudre le système formé par ces deux équations. Pour simplifier ce système, sans modifier la première équation, on la soustrait de la deuxième et on obtient

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 &= 0, \\ -2\varepsilon x + 2\varepsilon\alpha + \varepsilon^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Il est à noter que le nombre ε, bien que très petit, est obligatoirement non nul du fait que L et L' sont deux circonférences *différentes* de la famille considérée, de sorte que $\alpha \neq \alpha'$. Nous pouvons donc diviser le premier membre de la dernière équation par ε. On obtient

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 &= 0, \\ -2x + 2\alpha + \varepsilon &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

En résolvant ce système on trouve les points d'intersection des courbes L et L'. Mais ce ne sont pas ces points qui nous intéressent. Nous devons *rapprocher* l'une de l'autre les courbes L' et L pour trouver ainsi les points vers lesquels tendent les points d'intersection des courbes. Mais que veut dire « rapprocher » l'une de l'autre les courbes L' et L ? Cela signifie qu'on prend ε de plus en plus petit et tendant donc vers zéro. Dans ce cas la deuxième équation (48) peut être remplacée par la relation $-2x + 2\alpha = 0$, c'est-à-dire qu'« à la limite » le système (48) prend la forme

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 &= 0, \\ -2x + 2\alpha &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

De la deuxième équation on déduit que $\alpha = x$, il s'ensuit donc de la première que

$$y^2 = R^2. \tag{50}$$

Ainsi, le point de contact de la circonférence L avec l'enveloppe doit satisfaire à l'équation (50). Cela étant vrai

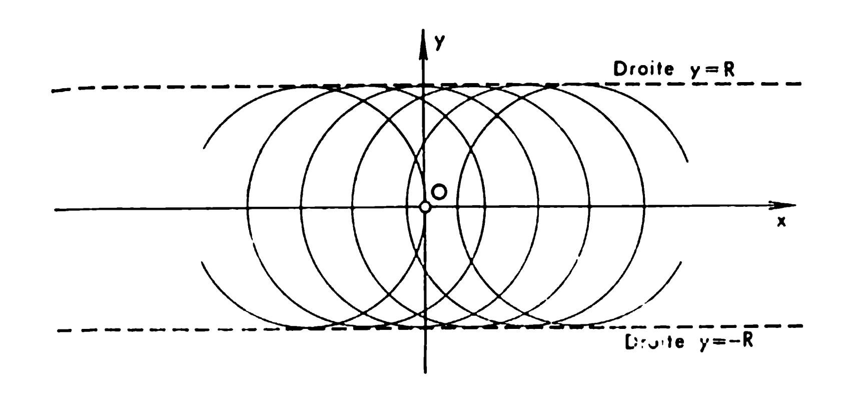


Fig. 51

pour n'importe quelle circonférence de la famille considérée, alors *chaque point de l'enveloppe doit satisfaire à l'équation obtenue* (50). Inversement, tout point vérifiant l'équation (50) appartient à l'enveloppe, ce qui peut être démontré par des calculs mais il est plus aisé de s'en convaincre en recourant à une interprétation géométrique: l'équation (50) se décompose en deux équations $y = R$ et $y = -R$ qui représentent deux droites parallèles à l'axe des abscisses et situées à la distance R de ce dernier (fig. 51). Ainsi, nos raisonnements nous ont donné l'équation (50) définissant l'enveloppe.

4. DIFFÉRENTIATION ET ÉTABLISSEMENT D'ÉQUATIONS DES ENVELOPPES

L'enveloppe représentée sur la fig. 51 peut être définie immédiatement en partant du fait que la famille de circonférences est très simple. Toutefois, les équations de

l'enveloppe étaient établies ci-dessus de façon algébrique sans tenir compte de la simplicité de construction géométrique de la famille considérée. Le même procédé peut également être appliqué aux autres cas où il faut trouver l'équation de l'enveloppe.

Reprenons nos raisonnements sous une forme plus générale. Soit

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

une famille de courbes. Prenons deux courbes « voisines » L et L' de cette famille, en faisant pour cela correspondre au paramètre les valeurs α et $\alpha + \varepsilon$:

$$\left.\begin{aligned} (L)\ f(x, y, \alpha) &= 0, \\ (L')\ f(x, y, \alpha + \varepsilon) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(comp. équations (46)). Pour trouver le point d'intersection (ou les points d'intersection, s'il y en a plusieurs) des courbes L et L' il faut résoudre ces équations comme un système d'équations. Rappelons-nous comment, à partir des équations (46), nous avons obtenu (47): sans modifier la première équation on a soustrait cette dernière de la deuxième équation. Il en était ainsi pour le cas général.

Alors on obtient le système

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0, \\ f(x, y, \alpha + \varepsilon) - f(x, y, \alpha) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Notons que pour passer aux équations (48) nous avons divisé le premier membre de la deuxième équation par ε; en procédant de la même façon on trouve

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0, \\ \frac{f(x, y, \alpha+\varepsilon) - f(x, y, \alpha)}{\varepsilon} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Ce système nous donne les points d'intersection des courbes L et L'. Faisons maintenant tendre L' vers L, c'est-à-dire prenons les valeurs de ε de plus en plus proches de zéro.

Cela étant, on a simplifié quelque peu la deuxième équation du système (48) et on a obtenu « à la limite » le système (49) qui nous a donné l'enveloppe. Il est donc naturel de s'attendre à ce que dans le cas du système (51) la deuxième équation se transforme également à la limite en une équation plus simple qui nous permet d'établir l'équation de l'enveloppe. Le lemme suivant permet de déterminer la forme de l'équation que l'on obtient, en passant à la limite, à partir de la deuxième équation (51).

● LEMME 2. *Soit $f(x, y, \alpha)$ un polynôme quelconque. En le développant selon les puissances de α, on le met sous la forme*

$$f(x, y, \alpha) = p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 + p_3\alpha^3 + \ldots, \tag{52}$$

où les coefficients p_0, p_1, p_2, p_3 sont eux-mêmes certains polynômes en x, y. Le premier membre de la deuxième équation (51) *est un polynôme, c'est-à-dire qu'on peut écrire*

$$\frac{f(x, y, \alpha+\varepsilon) - f(x, y, \alpha)}{\varepsilon} = f'_\alpha(x, y, \alpha) + \ldots, \tag{53}$$

où $f'_\alpha(x, y, \alpha)$ est la somme de tous les termes ne contenant pas ε, et par les points de suspension on a désigné la somme de tous les autres termes dont chacun a pour facteur le nombre ε ou sa puissance quelconque. Le polynôme $f'_\alpha(x, y, \alpha)$ prend alors la forme suivante:

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = p_1 + 2p_2\alpha + 3p_3\alpha^2 + \ldots \tag{54}$$

● DÉMONSTRATION.

$$\frac{f(x, y, \alpha+\varepsilon) - f(x, y, \alpha)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\{p_0 + p_1(\alpha+\varepsilon) +$$
$$+ p_2(\alpha+\varepsilon)^2 + p_3(\alpha+\varepsilon)^3 + \ldots - [p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 +$$
$$+ p_3\alpha^3 + \ldots]\} = p_1\frac{(\alpha+\varepsilon)-\alpha}{\varepsilon} + p_2\frac{(\alpha+\varepsilon)^2-\alpha^2}{\varepsilon} +$$
$$+ p_3\frac{(\alpha+\varepsilon)^3-\alpha^3}{\varepsilon} + \ldots =$$
$$= p_1 + p_2(2\alpha+\varepsilon) + p_3(3\alpha^2 + 3\alpha\varepsilon + \varepsilon^2) + \ldots =$$
$$= (p_1 + 2p_2\alpha + 3p_3\alpha^2 + \ldots) + \text{termes en } \varepsilon. \tag{55}$$

Le lemme démontré permet de remplacer le système (51) par le système

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) + \ldots &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

où par les points de suspension sont désignés les termes non écrits dont chacun a ε pour facteur. En résolvant le système (56) on obtient exactement les points d'intersection des courbes L et L'. Mais ces points ne donnent quand même pas la solution du problème posé. Poursuivons donc: commençons à rapprocher les courbes L' et L pour trouver les points vers lesquels tendent les points d'intersection des courbes L et L'. Autrement dit, on prend les valeurs de ε de plus en plus petites en le rapprochant de zéro. Nous pouvons donc remplacer la deuxième équation (56) par

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

car tous les termes désignés par les points de suspension contiennent ε et tendent avec lui vers zéro. Ainsi, le système (56) prend à la limite la forme

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

ce qui signifie qu'un point de contact de la courbe L avec l'enveloppe doit satisfaire aux équations (57). Comme cela est vrai pour *toute* courbe de la famille considérée, *chaque point de l'enveloppe doit satisfaire, pour une valeur quelconque de α, aux équations obtenues* (57). Autrement dit, si l'on élimine le paramètre α entre les équations (57), c'est-à-dire si l'on trouve la valeur de α à partir de l'une des équations pour la mettre ensuite dans l'autre, on obtient une seule équation ne contenant plus de α (c'est-à-dire liant seulement x et y) que doit vérifier tout point de l'enveloppe. Ainsi, on peut formuler le théorème suivant.

● THÉORÈME 1. *Chaque point de l'enveloppe satisfait à l'équation que l'on obtient de la relation* (57) *en éliminant le paramètre* α.

Le polynôme $f'_\alpha(x, y, \alpha)$ dont on se servait pour obtenir les équations (57) est appelé *dérivée* du polynôme $f(x, y, \alpha)$. Le calcul de la dérivée s'appelle *différentiation* du polynôme $f(x, y, \alpha)$. Comme on le voit des formules (52), (54) la différentiation des polynômes est une opération fort simple: dans les termes contenant le facteur α^k on le remplace par $k\alpha^{(k-1)}$, tout en supprimant les termes sans α.

Nous donnerons ci-dessous encore un théorème analogue au théorème 1 mais valable pour le cas où une famille de courbes est déterminée par les équations à deux paramètres α, β (voir (42), (43)).

● THÉORÈME 2. *Soit une famille de courbes définie par les équations* (42), (43). *Alors chaque point de l'enveloppe satisfait à l'équation que l'on obtient des relations*

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \alpha, \beta) &= 0, \\ g(\alpha, \beta) &= 0, \\ f'_\alpha \cdot g'_\beta - g'_\alpha \cdot f'_\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

en se débarrassant des paramètres α *et* β.

On obtient le polynôme $f'_\alpha = f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta)$ qui figure dans la troisième équation du système (58) *par dérivation par rapport à* α (c'est-à-dire il faut trouver une dérivée (voir (52), (54) sans faire attention au paramètre β). Le polynôme f'_β s'obtient de $f(x, y, \alpha, \beta)$ *par dérivation par rapport au paramètre* β. Il en est de même des dérivées g'_α et g'_β du polynôme $g(\alpha, \beta)$.

Pour vérifier les formules (58) nous examinerons, comme auparavant, deux courbes voisines L et L' de la famille considérée. Supposons que la courbe L corresponde aux valeurs α, β et la courbe L' aux valeurs voisines des paramètres $\alpha+\varepsilon_1$, $\beta+\varepsilon_2$. Autrement dit, les équations des courbes L et L' prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} (L) \qquad & f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ (L') \qquad & f(x, y, \alpha+\varepsilon_1, \beta+\varepsilon_2) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

les valeurs choisies des paramètres satisfaisant à la relation (43), c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} g(\alpha, \beta)=0, \\ g(\alpha+\varepsilon_1, \beta+\varepsilon_2)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

De la deuxième équation (59) nous retranchons la première et, procédant de façon analogue pour le système (60), nous obtenons:

$$\begin{aligned} f(x, y, \alpha, \beta)=0, \\ f(x, y, \alpha+\varepsilon_1, \beta+\varepsilon_2)-f(x, y, \alpha, \beta)=0, \\ g(\alpha, \beta)=0, \\ g(\alpha+\varepsilon_1, \beta+\varepsilon_2)-g(\alpha, \beta)=0, \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même:

$$\left.\begin{aligned} & f(x, y, \alpha, \beta)=0, \\ & [f(x, y, \alpha+\varepsilon_1, \beta+\varepsilon_2)-f(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2)]+ \\ & \qquad +[f(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2)-f(x, y, \alpha, \beta)]=0, \\ & g(\alpha, \beta)=0, \\ & [g(\alpha+\varepsilon_1, \beta+\varepsilon_2)-g(\alpha, \beta+\varepsilon_2)]+[g(\alpha, \beta+\varepsilon_2)-g(\alpha, \beta)]=0. \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Les deux premières relations, considérées comme un système par rapport à x et y, déterminent le point d'intersection des courbes L et L'. En vertu de la formule (53) on peut écrire:

$$\begin{aligned} f(x, y, \alpha+\varepsilon_1, \beta+\varepsilon_2)-f(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2)=\varepsilon_1(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots), \\ f(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2)-f(x, y, \alpha, \beta)=\varepsilon_2(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta)+\ldots), \\ g(\alpha+\varepsilon_1, \beta+\varepsilon_2)-g(\alpha, \beta+\varepsilon_2)=\varepsilon_1(g'_\alpha(\alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots), \\ g(\alpha, \beta+\varepsilon_2)-g(\alpha, \beta)=\varepsilon_2(g'_\beta(\alpha, \beta)+\ldots). \end{aligned}$$

Ainsi, les relations (61) peuvent être mises sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \alpha, \beta)=0, \\ g(\alpha, \beta)=0, \\ \varepsilon_1(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots)+\varepsilon_2(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta)+\ldots)=0, \\ \varepsilon_1(g'_\alpha(\alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots)+\varepsilon_2(g'_\beta(\alpha, \beta)+\ldots)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

On a noté ici par les points de suspension les termes en ε_1 ou ε_2. Multipliant la troisième des relations (62) par

$$\varepsilon_1(g'_\beta(\alpha, \beta)+\ldots)-\varepsilon_2(g'_\alpha(\alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots),$$

la quatrième par

$$-\varepsilon_1 (f'_\beta (x, y, \alpha, \beta) + \ldots) + \varepsilon_2 (f'_\alpha (x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots)$$

et additionnant, on obtient après la réduction des termes semblables et le groupement :

$$(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) [(f'_\alpha (x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots) (g'_\beta (\alpha, \beta) + \ldots) -$$
$$- (g'_\alpha (\alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots) (f'_\beta (x, y, \alpha, \beta) + \ldots)] = 0.$$

Le nombre $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$ est obligatoirement non nul, car de l'égalité $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = 0$ il découlerait que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ et les courbes L et L' coïncideraient, ce qui contredit notre hypothèse. Par conséquent, nous pouvons diviser la dernière relation par $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$ pour obtenir

$$(f'_\alpha (x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots) (g'_\beta (\alpha, \beta) + \ldots) -$$
$$- (g'_\alpha (\alpha, \beta + \varepsilon_2) + \ldots) (f'_\beta (x, y, \alpha, \beta) + \ldots) = 0.$$

Cette relation, considérée ensemble avec la première des équations (62), nous donnera les points d'intersection des courbes L et L'. Rapprochant les courbes L' et L, c'est-à-dire prenant ε_1 et ε_2 de plus en plus proches de zéro, cette dernière relation prend à la limite la forme suivante:

$$f'_\alpha (x, y, \alpha, \beta) \cdot g'_\beta (\alpha, \beta) - g'_\alpha (\alpha, \beta) \cdot f'_\beta (x, y, \alpha, \beta) = 0,$$

c'est-à-dire celle de la dernière équation du système (58). Prise ensemble avec la première équation (58), elle nous permettra de trouver le point de contact de la courbe L avec l'enveloppe. Ainsi, en ajoutant à la relation obtenue les deux premières équations (62), on obtient le système (58). Le point de contact de la courbe L avec l'enveloppe doit satisfaire à ce système. Vu que *toute* courbe de la famille en question peut être prise pour L, il s'ensuit que *tout* point de l'enveloppe doit (pour α, β quelconques) satisfaire au système (58), ce qui découle du théorème 2.

Les lecteurs qui ont pris connaissance de la notion du déterminant et des théorèmes fondamentaux sur les équations linéaires peuvent s'assurer que le théorème ci-dessous est vrai. *Si une famille de courbes est décrite par les équations* (44), (45), *alors tout point de l'enveloppe vérifie l'équation que l'on obtient en ajoutant à* (44), (45) *la relation*

$$\begin{vmatrix} f'_{\alpha_1} & f'_{\alpha_2} & \cdots & f'_{\alpha_m} \\ (g_1)'_{\alpha_1} & (g_1)'_{\alpha_2} & \cdots & (g_1)'_{\alpha_m} \\ (g_2)'_{\alpha_1} & (g_2)'_{\alpha_2} & \cdots & (g_2)'_{\alpha_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (g_{m-1})'_{\alpha_1} & (g_{m-1})'_{\alpha_2} & \cdots & (g_{m-1})'_{\alpha_m} \end{vmatrix} = 0$$

et en éliminant les paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ entre les égalités du système ainsi obtenu.

Pour $m = 1$ ce théorème se ramène au théorème 1 et pour $m = 2$, au théorème 2.

5. LIGNE DISCRIMINANTE

Les théorèmes 1 et 2 affirment que tout point de l'enveloppe satisfait à l'équation que l'on obtient en éliminant les paramètres entre les équations (57) ou (58). Mais cela ne veut pas dire que l'enveloppe est exactement décrite par l'équation ainsi obtenue. Nous avons tout simplement stipulé, et ce n'est pas par hasard d'ailleurs, que tout point de l'enveloppe vérifie cette équation. Le fait est qu'une courbe déterminée par l'équation que l'on obtient en éliminant les paramètres entre les équations (57) ou (58), appelée *ligne discriminante*, peut posséder outre les points de l'enveloppe d'autres points n'appartenant pas à celle-ci.

Mais que représente donc la ligne discriminante ? Pour répondre à cette question nous allons discuter (sans entrer dans les détails, bien que tous les raisonnements ne restent valables que si l'on utilise la notion de dérivée introduite plus haut) la forme d'une courbe définie par une équation quelconque. Soit $f(x, y)$ un certain polynôme par rapport à x, y. Le lieu géométrique des points situés sur un plan et dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$f(x, y) = 0$$

est appelé *courbe algébrique*. La droite est une courbe algébrique, car son équation est de la forme $y = kx + b$, ou $y - kx - b = 0$. Les relations (18), (22), (41) permettent d'en venir à la conclusion que la circonférence, l'hyperbole et la parabole sont également des courbes algébriques.

Une courbe algébrique est dite *lisse* si elle admet des tangentes à tous ses points. La droite, la circonférence, la parabole, l'hyperbole sont des courbes lisses. Mais il peut se faire qu'une courbe algébrique admet des *points singuliers*

parmi lesquels on peut citer: *nœuds*, *points de rebroussement* et *points isolés*. Ainsi, par exemple, la courbe déterminée par l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2 (x^2 - y^2) = 0$$

(elle est appelée *lemniscate de Bernoulli*, fig. 52) est coupée par elle-même; la courbe

$$y^2 - x^4 = 0$$

(fig. 53) a un point de contact à l'origine des coordonnées, et la courbe de l'équation

$$(x^2 + y^2)(y - x - 1) = 0$$

est formée par les points appartenant à la droite $y - x - 1 = 0$ (c.-à-d. $y = x + 1$) et, de plus, le point O (origine des coordonnées) au voisinage duquel il n'y a pas d'autres points de cette même courbe (fig. 54). Toute courbe algébrique ou ne contient pas du tout de points singuliers, autrement dit elle est lisse, ou bien elle ne possède qu'un nombre fini de points singuliers qui la divisent en morceaux lisses isolés, la courbe algébrique ne pouvant avoir d'autres points singuliers outre ceux mentionnés plus haut.

Soit une *famille* de courbes algébriques, déterminée par l'équation (37) ou (42), (43). Si une courbe quelconque L de la famille considérée a un point de croisement T (fig. 55), alors la courbe L' « voisine » de celle-ci doit couper, *sans manquer*, la courbe L en un point M dans le voisinage du point T. En reprenant les raisonnements qui nous ont permis d'établir le théorème 1 ou le théorème 2, on comprend aisément que les coordonnées du point T satisfont aux équations (57) ou (58), c'est-à-dire que le *point T appartient à la ligne discriminante*. Donc, les nœuds de chaque courbe de la famille considérée doivent appartenir à la ligne discriminante. De même, tout point isolé de la courbe L doit appartenir à cette ligne. Ainsi, la ligne discriminante renferme non seulement l'enveloppe, mais également tous les

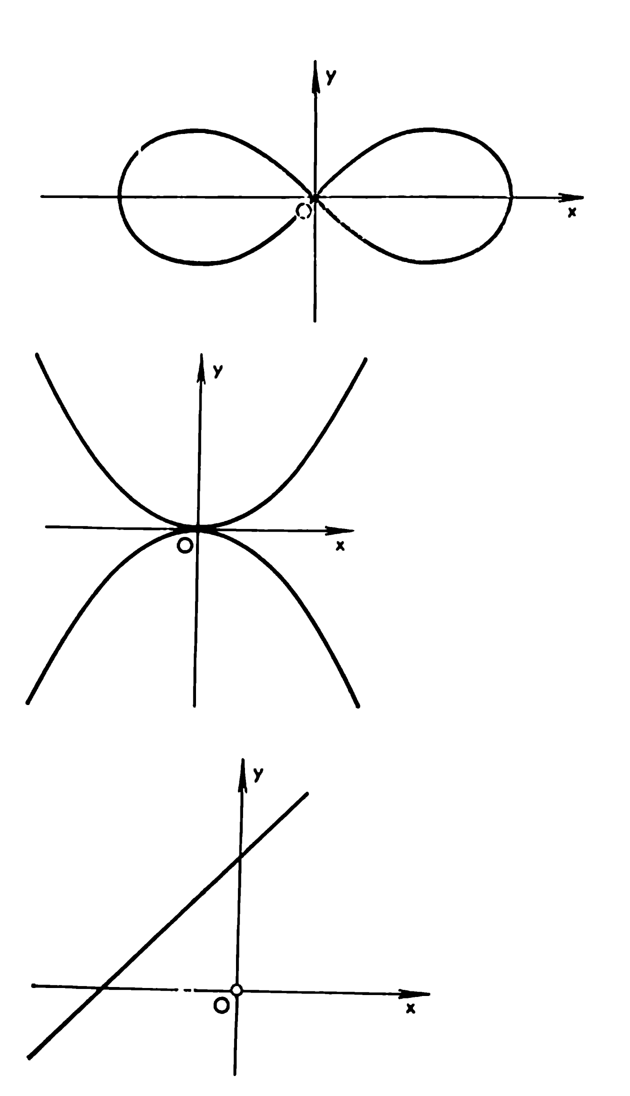
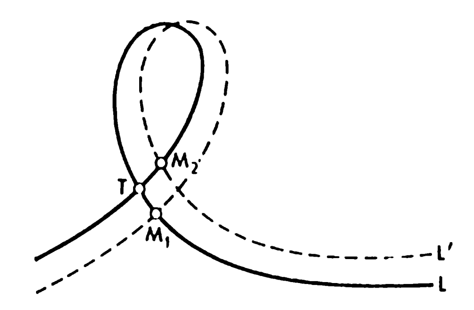


Fig. 52

Fig. 53

Fig. 54

Fig. 55


M2
T
M1
L'
L

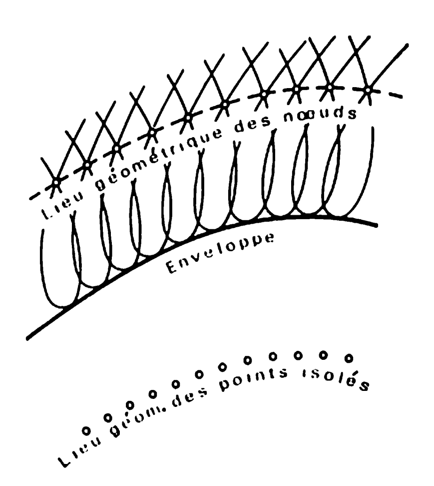

Lieu géométrique des nœuds
Enveloppe
Lieu géom. des points isolés

Fig. 56

points singuliers des courbes de la famille considérée. Il s'avère donc que nous avons mentionné tous les points de la ligne discriminante, autrement dit, la *ligne discriminante se compose de l'enveloppe et du lieu géométrique des points singuliers de toutes les courbes de la famille considérée* (fig. 56). Si l'on considère une famille de courbes dont aucune n'a des points singuliers, alors la ligne discriminante ne comporte que l'enveloppe seule, c'est-à-dire qu'elle coïncide avec l'enveloppe. Dans les exemples ci-dessous toutes les familles se composent de courbes n'ayant pas de points singuliers. C'est pourquoi nous nous bornerons à rechercher seulement la ligne discriminante, car elle coïncidera dans ces cas avec l'enveloppe, c'est-à-dire nous allons éliminer les paramètres entre les équations (57) ou (58).

6. EXEMPLES D'ÉTABLISSEMENT D'ÉQUATIONS DES ENVELOPPES

● EXEMPLE 1. Considérons de nouveau la famille de circonférences (35), c.-à-d. posons

$$f(x, y, \alpha) = \alpha^2 - 2\alpha x + (x^2 + y^2 - R^2).$$

La dérivée de ce polynôme est

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 2\alpha - 2x.$$

Donc, pour trouver l'enveloppe il faut éliminer α entre les équations

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 - 2\alpha x + (x^2 + y^2 - R^2) &= 0, \\ 2\alpha - 2x &= 0. \end{aligned}\right\}$$

On obtient donc le même système que nous avons eu auparavant (cf. (49)), d'où il découlait $y^2 = R^2$ (cf. (50)). Ainsi, l'enveloppe est formée par deux droites parallèles $y = R$ et $y = -R$ (voir fig. 51).

● EXEMPLE 2. Considérons maintenant la famille de circonférences (36), c.-à-d. posons

$$f(x, y, \alpha)=\alpha^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)-2\alpha x+(x^2+y^2+h^2).$$

La dérivée de ce polynôme est égale à:

$$f'_\alpha(x, y, \alpha)=2\alpha\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)-2x.$$

Ainsi, pour trouver l'enveloppe on élimine α entre les équations

$$\alpha^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)-2\alpha x+(x^2+y^2+h^2)=0,$$

$$2\alpha\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)-2x=0.$$

Multipliant la deuxième de ces équations par $-\frac{\alpha}{2}+\frac{x}{2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}$ et additionnant à la première, on obtient

$$x^2+y^2+h^2-\frac{x^2}{1-\frac{h^2}{c^2}}=0,$$

d'où, divisant par h^2 et réduisant les termes semblables, on trouve l'équation de l'enveloppe cherchée *) sous une forme la plus simple (cf. (22))

$$\frac{x^2}{c^2-h^2}-\frac{y^2}{h^2}=1 \; {}^{**}).$$

---

*) Strictement parlant, on n'a démontré qu'un seul fait, à savoir: des deux équations primitives renfermant le paramètre α il s'ensuit que x et y vérifient l'équation obtenue de l'hyperbole. La réciproque est-elle vraie, c'est-à-dire est-ce que tous les x, y, vérifiant l'équation de l'hyperbole, satisferont, pour un α quelconque, aux équations primitives ? Dans le cas considéré on peut s'en convaincre à l'aide de calculs inverses. Il faudrait vérifier l'équivalence de l'équation obtenue aux équations primitives aux paramètres dans tous les exemples suivants. Nous n'en ferons pas dans notre exposé.

**) Dans le chapitre II nous n'avons construit que la branche de droite de l'hyperbole (voir fig. 20), c.-à-d. on a complété l'équation de cette hyperbole par l'inégalité $x > 0$. Cela s'explique par le fait que selon les données du problème on n'avait à considérer que les α positifs, c.-à-d. non pas toutes les courbes de la famille (36), mais seulement celles qui correspondent aux valeurs positives de α. Si l'on examine toutes les circonférences de la famille (36), on obtient pour enveloppe toute l'hyperbole en question (fig. 57).

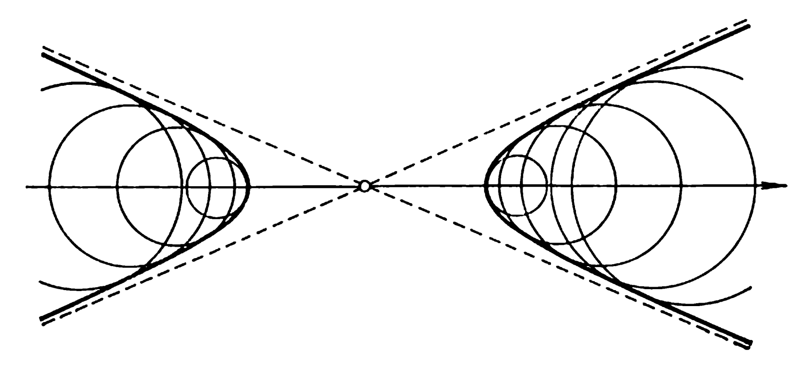


Fig. 57

● EXEMPLE 3. Considérons la famille de trajectoires (41), c.-à-d. posons

$$f(x, y, \alpha, \beta) = gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2 y,$$
$$g(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2 - v_0^2.$$

Calculons les dérivées:

$$f'_\alpha = 4\alpha y - 2\beta x; \quad f'_\beta = -2\alpha x, \quad g'_\alpha = 2\alpha, \quad g'_\beta = 2\beta.$$

La dernière des équations (58) prend alors (après la réduction par 4) la forme

$$2\alpha\beta y + (\alpha^2 - \beta^2)\, x = 0.$$

Ainsi, pour trouver l'équation de l'enveloppe nous devons éliminer α et β entre les équations

$$\left.\begin{aligned} gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2 y = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 - v_0^2 = 0, \\ 2\alpha\beta y + (\alpha^2 - \beta^2)\, x = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

En multipliant la première de ces équations par β, la troisième par $-\alpha$ et en additionnant, on obtient, après avoir réduit les termes semblables,

$$g\beta x^2 - \alpha(\alpha^2 + \beta^2) x = 0,$$

ou, tenant compte de la deuxième équation (63),

$$g\beta x^2 - \alpha v_0^2 x = 0.$$

Comme la droite $x = 0$, c.-à-d. l'axe des ordonnées n'est évidemment pas une enveloppe (du point de vue géométrique ceci découle de la fig. 10, et du point de vue purement algébrique la droite $x = 0$ n'est pas une solution de l'équation (63)), on peut réduire la dernière équation par x

$$g\beta x - \alpha v_0^2 = 0, \quad \text{c.-à-d.} \quad \alpha = \frac{g\beta}{v_0^2} x.$$

Portant cette valeur de α dans la troisième équation (63), on obtient (après la réduction par $\beta^2 x$)

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

C'est bien l'équation de l'enveloppe cherchée. Il est facile de voir que cette courbe coïncide avec la parabole de sûreté décrite dans le chapitre I. Ainsi, par exemple, en éliminant t entre les équations (12), (13) (et en remplaçant h par y), on trouve la relation ci-dessus.

● EXEMPLE 4. Soit un segment de longueur constante l qui glisse par ses extrémités sur deux droites perpendiculaires. Cherchons l'enveloppe de ces segments (cf. fig. 38) ; celle-ci, comme nous l'avons dit dans le chapitre III, est appelée *astroïde*.

Soit MN un des segments considérés (fig. 58). Prenons pour axes de coordonnées deux droites perpendiculaires sur lesquelles glissent les extrémités du segment. Désignons par α l'abscisse du point M et par β l'ordonnée du point N. Alors, la longueur du segment MN étant égale à l, on ob-

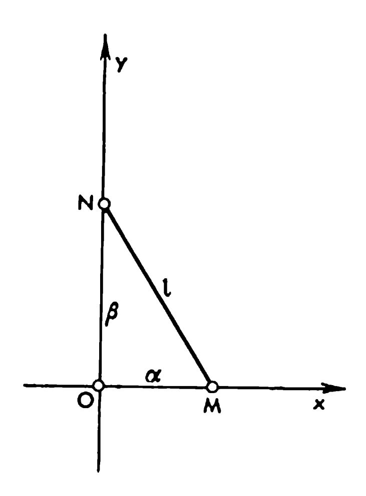


Fig. 58

tient du triangle rectangle OMN:

$$\alpha^2 + \beta^2 = l^2. \qquad (64)$$

Le coefficient angulaire de la droite MN, c.-à-d. la tangente de l'angle XMN, est égal à $-\frac{\beta}{\alpha}$, et vu que $\operatorname{tg} \widehat{XMN} = -\operatorname{tg} \widehat{OMN}$, le coefficient angulaire a également une même valeur pour toute autre position du segment MN, c.-à-d. s'il se trouve dans le premier, deuxième, troisième ou quatrième quadrant. Donc, l'équation de la droite MN prend la forme

$$y = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) x + \beta,$$

ou en multipliant par α

$$\alpha y + \beta x - \alpha\beta = 0. \qquad (65)$$

On est ainsi amené au problème de l'établissement d'équation de l'enveloppe d'une famille de droites, définie par les équations (64), (65), ou, ce qui revient au même, par les équations (42), (43), où

$$f(x, y, \alpha, \beta) = \alpha y + \beta x - \alpha\beta,$$
$$g(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2 - l^2.$$

Calculons les dérivées :

$$f'_\alpha = y - \beta, \quad f'_\beta = x - \alpha, \quad g'_\alpha = 2\alpha, \quad g'_\beta = 2\beta.$$

La dernière des équations (58) prend (après la réduction par 2) la forme

$$\beta y - \alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0. \qquad (66)$$

Ainsi, pour trouver l'enveloppe nous devons éliminer α et β entre les équations (64), (65), (66). En multipliant (65) par α et (66) par β et en additionnant, on a

$$(\alpha^2 + \beta^2)\, y = \beta^3,$$

d'où, tenant compte de (64),

$$\beta = [(\alpha^2 + \beta^2)\, y]^{1/3} = (l^2 y)^{1/3}.$$

D'une façon analogue, en multipliant (65) par β et (66) par $-\alpha$ et en additionnant, on obtient

$$\alpha = (l^2 x)^{1/3}.$$

Enfin, portant ces valeurs de α et β dans (64), on trouve

$$(l^2 x)^{2/3} + (l^2 y)^{2/3} = l^2,$$

ou, après la réduction par $l^{4/3}$,

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}. \qquad (67)$$

C'est bien l'équation de l'enveloppe (c.-à-d. de l'astroïde).

● EXEMPLE 5. Soit un angle droit donné dans un plan quelconque. On mène toutes les droites possibles décou-

pant dans cet angle les triangles de l'aire 2. Cherchons l'enveloppe de toutes ces droites (fig. 59).

Prenons pour axes de coordonnées les côtés de l'angle donné. Choisissons l'une des droites découpant dans cet angle un triangle de l'aire 2. Soient M, N les points d'intersection de cette droite avec les axes de coordonnées (fig. 60). Désignons par α l'abscisse du point M et par β l'ordonnée du point N. Alors on trouve, comme ci-dessus (cf. (65)), que la droite MN est définie par l'équation

$$\alpha y + \beta x - \alpha\beta = 0. \tag{68}$$

Toutefois les nombres α et β satisfont non pas à la condition (64) (la longueur du segment MN est égale à l), mais à la condition suivante :

$$\alpha\beta = 4, \tag{69}$$

ce qui signifie que l'aire du triangle OMN est égale à 2 (vu que $OM = \alpha$, $ON = \beta$, alors $S_{\Delta OMN} = 1/2\alpha\beta$). Ainsi, ce problème se ramène à l'établissement d'équation de l'enveloppe d'une famille de droites, décrite par les équations (68), (69), ou, ce qui revient au même, par les équations (42), (43), où

$$f(x, y, \alpha, \beta) = \alpha y + \beta x - \alpha\beta,$$
$$g(\alpha, \beta) = \alpha\beta - 4.$$

Calculons les dérivées :

$$f'_\alpha = y - \beta, \quad f'_\beta = x - \alpha, \quad g'_\alpha = \beta, \quad g'_\beta = \alpha.$$

La dernière des équations (58) prend la forme

$$\alpha y - \beta x = 0. \tag{70}$$

Ainsi, pour résoudre ce problème il faut éliminer α et β entre les équations (68), (69), (70). En appliquant (68) et (70), on obtient

$$\alpha y = 1/2\alpha\beta, \quad \beta x = 1/2\alpha\beta.$$



Fig. 59

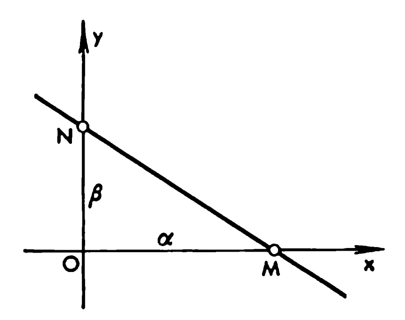


Fig. 60

En réduisant la première de ces équations par α, et la deuxième par β (ce qui est possible vu qu'en vertu de (69) α et β ne sont pas nuls), on trouve

$$\beta = 2y, \quad \alpha = 2x.$$

Portant, enfin, les valeurs obtenues de α et β dans (69) nous aurons l'équation recherchée de l'enveloppe

$$xy = 1. \tag{71}$$

Toute *tangente* à la courbe (71) est l'une des droites de la famille considérée et découpe donc dans l'angle droit donné un triangle de l'aire 2. Comme nous l'avons vu dans le chapitre II, une hyperbole dont les asymptotes se coupent à angle droit possède la même propriété : une telle hyperbole est dite *équilatère*. On en conclut que la *courbe* (71) *est également une hyperbole*. Les équations (71) et (22) qui déterminent chacune une même courbe, hyperbole, sont de forme différente, car les hyperboles (71) et (22) sont disposées d'une manière différente par rapport aux axes de coordonnées.

● EXEMPLE 6. Considérons une circonférence de rayon $2a$ et de centre au point F_1. Prenons à l'intérieur de cette circonférence un point F_2 distant du centre de $2c$. En joignant par le segment un point arbitraire A de la circonférence avec le point F_2, on mène par le milieu de ce segment la perpendiculaire L (fig. 61). Trouver l'enveloppe d'une famille de telles perpendiculaires (fig. 62).

Pour résoudre ce problème nous prenons pour axe des abscisses la droite F_1F_2 et pour axe des ordonnées la perpendiculaire au segment F_1F_2 qui passe par son milieu. Les abscisses des points F_1 et F_2 sont alors c et $-c$ respectivement. Soient A un point quelconque appartenant à la circonférence considérée, α et β les coordonnées de ce point. Pour qu'un point M de coordonnées x, y appartienne à la perpendiculaire L tracée par le milieu du segment AF_2, il faut et il suffit que soit vérifiée l'égalité $MA = MF_2$

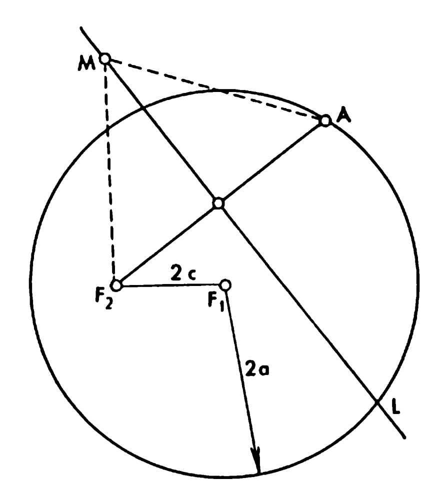


Fig. 61

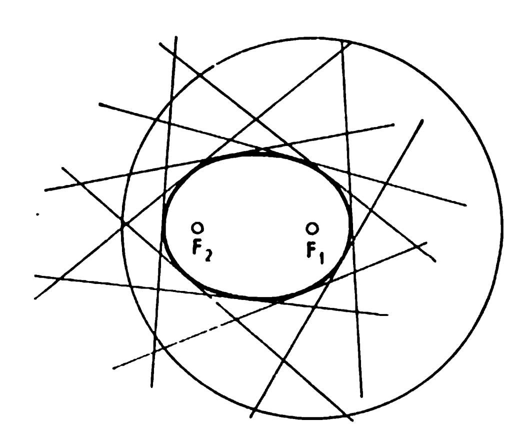


Fig. 62

ou, ce qui revient au même, l'égalité

$$MA^2 = MF_2^2.$$

Mais $MA^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$ (cf. p. 33) et, d'une façon analogue, $MF_2^2 = (x + c)^2 + y^2$. Ainsi, l'équation de la perpendiculaire L menée par le milieu du segment AF_2 prend la forme

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x + c)^2 + y^2,$$

ou, après des simplifications évidentes,

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2cx - c^2 = 0. \qquad (72)$$

L'équation de la circonférence de rayon $2a$ et de centre au point F_1 de coordonnées $(c, 0)$ est de la forme $(x - c)^2 + y^2 = (2a)^2$ (cf. (18)). Le point A appartenant à cette circonférence, ses coordonnées α, β doivent vérifier cette équation, c.-à-d.

$$(\alpha - c)^2 + \beta^2 = 4a^2,$$

ou, si l'on effectue les simplifications évidentes,

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha c + c^2 - 4a^2 = 0. \qquad (73)$$

Le problème consiste donc à trouver l'équation de l'enveloppe d'une famille de droites, décrite par les équations (72), (73). En désignant comme toujours le premier membre de l'équation (72) par $f(x, y, \alpha, \beta)$ et celui de l'équation (73) par $g(\alpha, \beta)$, on obtient facilement la dernière des équations (58) :

$$(\alpha - x)\,\beta - (\beta - y)\,(\alpha - c) = 0. \qquad (74)$$

Les équations (72), (73), (74) nous donnent l'équation de l'enveloppe recherchée. Cette enveloppe est appelée *ellipse* ; les points F_1 et F_2 sont les foyers de l'ellipse. On peut obtenir l'équation de l'ellipse en éliminant les paramètres α et β entre les équations (72), (73) et (74). Sans le faire ici nous déduirons, en revanche, de la relation (74) quelques propriétés géométriques fort intéressantes de l'ellipse.

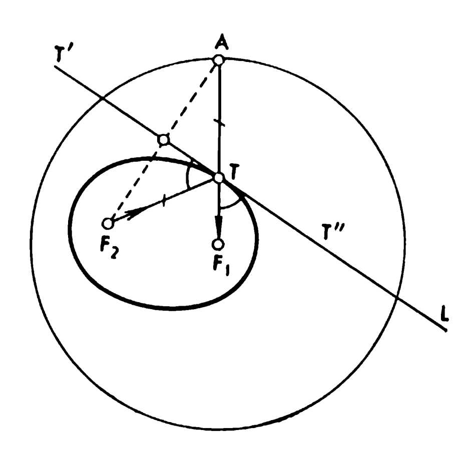


Fig. 63

Pour commencer rappelons que lors du choix des valeurs de α et β, vérifiant la deuxième équation (58), c.-à-d. pour une courbe L quelconque de la famille en question, les inconnues x, y, déterminées à partir du système (58), représentent les *coordonnées d'un point T, où la courbe L est tangente à l'enveloppe.* Dans le cas considéré cela signifie que pour les valeurs de α et β vérifiant l'équation (73), c.-à-d. pour un point A (fig. 63) appartenant à la circonférence, les *inconnues x, y déterminées à partir du système* (72), (74) *représentent les coordonnées d'un point T en lequel une perpendiculaire menée par le milieu du segment AF_2 est tangente à l'ellipse.* Ainsi, les coordonnées du point de contact T satisfont à l'équation (74). Les simplifications évidentes faites, cette équation se met sous la forme

$$y=\frac{\beta}{\alpha-c}\,x-\frac{\beta c}{\alpha-c}\,,$$

d'où il s'ensuit qu'elle définit une *droite* quelconque. Le point T appartient à cette droite, ses coordonnées vérifiant

l'équation ci-dessus. Plus loin, le point F_1 se trouve également sur cette droite (car ses coordonnées $x = c$, $y = 0$ satisfont évidemment à cette équation) : le point A appartient à son tour à cette droite (on voit aisément que ses coordonnées vérifient l'équation considérée). Les *points F_1, T et A se trouvent donc sur une même droite.*

Comme nous l'avons dit plus haut, la perpendiculaire L menée par le milieu du segment AF_2 est *tangente* à l'ellipse en un point T quelconque, car l'ellipse est une enveloppe de toutes ces perpendiculaires. Puis, les points F_2 et A sont symétriques par rapport à la droite L. Enfin, les points F_1, T et A se trouvent, comme nous l'avons démontré plus haut, sur une même droite, c'est-à-dire que le point T appartient au rayon F_1A. Donc, *si l'on mène une tangente L quelconque à une ellipse, alors le point A, symétrique du foyer F_2 par rapport à la droite L, se trouve sur une circonférence de rayon $2a$ et de centre au foyer F_1 ; le point T, qui est un point de contact de la droite L avec l'ellipse, coïncide avec le point d'intersection de la droite L et du rayon F_1A.*

Les points F_2 et A étant symétriques par rapport à la droite L, $TF_2 = TA$, d'où $TF_2 + TF_1 = TF_1 + TA = 2a$. Ainsi, la *somme des distances du point T de l'ellipse à ses foyers est égale à $2a$.* Cela est juste pour tout point appartenant à une ellipse, car chaque point de l'ellipse est un point de contact avec une des droites L (car l'ellipse est une enveloppe). On comprend aisément que pour un point T', *intérieur* à une ellipse, la somme des distances $T'F_1$ et $T'F_2$ est inférieure à $2a$ (fig. 64), et pour un point *extérieur* à une ellipse, cette somme dépasse $2a$. Donc, on appelle *ellipse le lieu géométrique des points du plan, dont la somme des distances à deux points fixes, appelés foyers, est égale à un segment donné de $2a$.* En règle générale, on prend cette propriété de l'ellipse pour sa définition.

Poursuivons notre exposé. Etant donné que les points F_2 et A sont symétriques par rapport à la droite L et les segments F_1T et TA constituent le prolongement l'un de

l'autre, on obtient

$$\widehat{F_2TT'} = \widehat{ATT'} = \widehat{F_1TT''}.$$

Cela signifie qu'un rayon lumineux issu du point F_2 suivant la direction F_2T et réfléchi par la droite L selon la loi « l'angle d'incidence est égal à celui de réflexion » suivra le segment TF_1. Mais, du fait que le point T est un point de contact de la droite L avec une ellipse, la réflexion d'un rayon lumineux par la droite L au point T équivaut à la réflexion par l'ellipse même au point T. Donc, *si une source lumineuse ponctuelle se trouve à l'un des foyers de l'ellipse, chaque rayon réfléchi converge à l'autre foyer, c'est-à-dire tous les rayons réfléchis convergent à l'autre foyer de l'ellipse* (fig. 65). Cette propriété « optique » de l'ellipse ressemble à celle d'une parabole, établie dans le chapitre I. Une hyperbole possède elle aussi une propriété analogue.

Notons pour conclure que l'équation de l'ellispe considérée a la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Elle peut être obtenue des équations (72), (73), (74) en éliminant les paramètres α et β ; mais les transformations algébriques étant assez compliquées nous n'allons pas nous attarder aux détails. Ordinairement, on désigne la valeur positive $a^2 - c^2$ par b^2, et l'équation de l'ellipse prend alors la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (75)$$

● REMARQUE. Nous nous sommes bornés ici à examiner quelques exemples d'établissement d'équations des enveloppes de *courbes algébriques* seulement. Tout ce que nous avons dit plus haut reste en vigueur pour des courbes non algébriques (transcendantes). La sinusoïde, les graphiques des fonctions logarithmique et exponentielle, la cycloïde en sont des exemples les plus simples. Mais pour trouver les

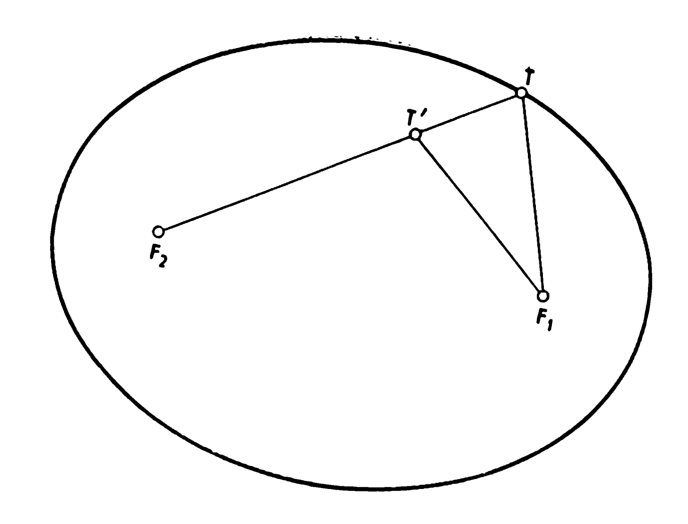


Fig. 64

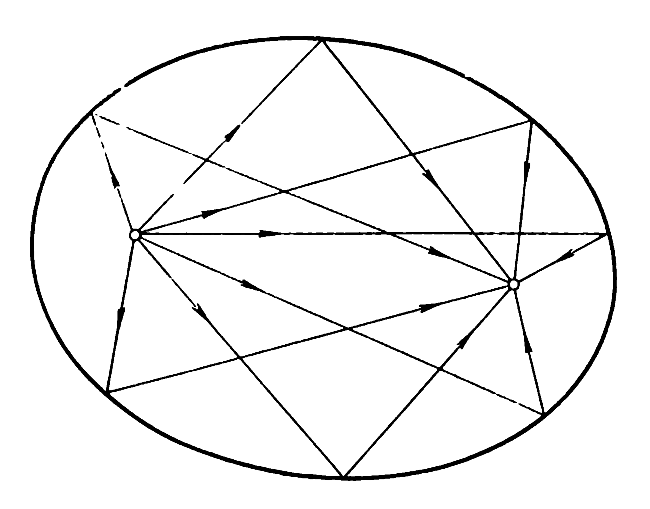


Fig. 65

enveloppes de telles courbes il faut savoir différentier non seulement les polynômes, mais également les fonctions composées : exponentielles, trigonométriques, etc. De plus, les points singuliers des courbes non algébriques sont parfois difficiles à construire et leur nombre peut être illimité. Pour éviter toutes ces complications nous nous sommes bornés dans notre exposé à passer en revue seules les courbes algébriques et leurs familles.

7. DÉVELOPPÉES ET DÉVELOPPANTES

Commençons par rappeler certaines notions introduites dans le chapitre III (p. 58). Considérons une courbe K quelconque. En un point arbitraire A de cette courbe menons une tangente AD et une perpendiculaire AN à cette tangente (cf. fig. 40). La droite AN est appelée *normale* à la courbe K au point A. Si l'on considère toutes les normales à la courbe K que l'on trace en tous les points de cette courbe, on obtient une famille de droites — famille de normales de la courbe K. L'enveloppe E de cette famille de droites est dite *développée* de la courbe K en question.

Traçons par deux points voisins A, A' appartenant à la courbe K des normales à cette courbe. Soient N, N' deux points de contact de ces normales avec la développée et Q le point d'intersection des normales AN et $A'N'$ (fig. 66). Alors les angles adjacents à la « base » d'un « triangle » $AA'Q$, ayant pour « base » l'arc AA' de la courbe K, sont égaux (droits, car AN et $A'N'$ sont des normales). Si la base AA' était un segment rectiligne, les côtés latéraux AQ et $A'Q$ seraient égaux, étant donné l'égalité des angles mentionnés. Mais, en réalité, la base AA' a une faible courbure, donc les côtés AQ et $A'Q$ ne sont égaux qu'approximativement

$$AQ \approx A'Q.$$

L'arc NN' ayant une courbure insignifiante (les normales AN et $A'N'$ forment un angle très petit !), la longueur de

cet arc ne diffère que de très peu de celle d'une ligne brisée NQN' :

$$\widehat{NN'} \approx NQ + QN'.$$

Ainsi,

$$\widehat{NN'} \approx NQ + QN' = (AN - AQ) + (A'Q - A'N') =$$
$$= (AN - A'N') + (A'Q - AQ) \approx AN - A'N'.$$

Le fait remarquable est que l'égalité approchée $\widehat{NN'} \approx \approx AN - A'N'$ est en réalité exacte

$$\widehat{NN'} = AN - A'N'. \qquad (76)$$

Ceci peut être démontré par *intégration* de l'égalité approchée ci-dessus, opération inverse à la différentiation et étudiée par les mathématiques supérieures. Cela étant, l'égalité (76) est vraie sans supposition que l'arc AA' soit « petit ».

L'égalité (76) admet une interprétation géométrique fort simple et concrète. Soit un fil parfaitement fin, flexible et inextensible enroulé sur une lame en forme d'une développée. Supposons que ce fil soit tendu de façon à suivre la développée jusqu'au point N' pour se diriger ensuite suivant le segment $N'A'$ d'une tangente à la développée et qu'on ait fixé à ce fil au point A' un crayon (fig. 67). Étant donné qu'en vertu de (76) $AN = \widehat{NN'} + N'A'$, on peut déplacer le crayon en un point A de façon que le fil reste toujours tendu. Cela étant vrai pour tout point A de la courbe K, on peut, *en faisant déplacer le crayon de façon à dérouler le fil de la développée tout en le maintenant tendu, décrire au crayon la courbe K*. C'est pour cela que la courbe K est appelée *développante* de la courbe E.

Ainsi, si E est une développée de la courbe K, alors K est une développante de la courbe E. Si l'on attache un crayon en un autre point du fil enroulé sur la courbe E, alors, en déroulant ce fil, on obtient une autre développ ante

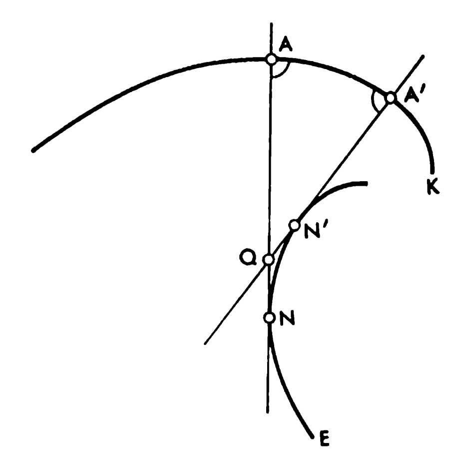


Fig. 66

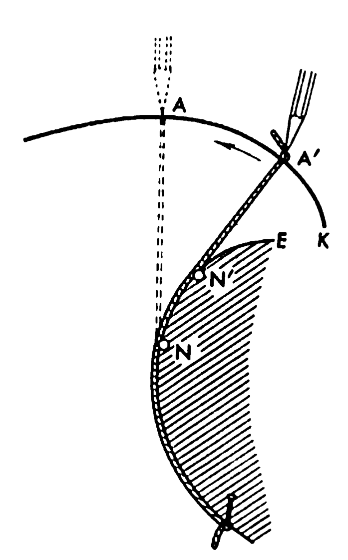


Fig. 67

de la courbe E. Donc, à la courbe E correspond une infinité de développantes; pour chacune d'elles la courbe E est une développée. Chaque tangente à la développée E étant une normale de sa développante K (vu qu'une développée est définie comme l'enveloppe de la famille des normales à la courbe K !), deux développantes quelconques de la courbe E ont des normales communes, c'est-à-dire la normale à l'une des développantes l'est aussi pour l'autre (fig. 68). Cela étant, la longueur d'un segment de la normale commune, compris entre deux développantes, reste constante, c.-à-d. $AB = A'B' = A''B'' = \ldots$ En effet, si l'on attache à un fil qu'on déroule de la développée E deux crayons (fig. 69), ces deux crayons décriront deux développantes de la courbe E, et la longueur du segment de la normale commune, compris entre ces développantes, restera toujours égale à la longueur du fil entre ces crayons.

Si l'on fixe un fil qu'on déroule d'une développée en un point N quelconque de la courbe E, le crayon, lors de son mouvement ultérieur, décrira un arc de cercle qui a un point de contact avec la courbe K en A (fig. 70). Le rayon de ce cercle est égal au segment de la normale, compris entre les points A et N, ce dernier étant le point de contact de la normale avec la développée; le centre de ce cercle se confond avec le point N (fig. 71). Le cercle ainsi construit est appelé *cercle de courbure* de la courbe K au point A. Ce cercle se rapproche le plus, en comparaison de tous les autres cercles, de la courbe K dans le voisinage du point A. On peut dire qu'un petit arc de la courbe K dans le voisinage du point A se comporte comme un arc du cercle de courbure; en particulier, la courbure de K dans le voisinage du point A, c.-à-d. la vitesse de détour d'une tangente lors du déplacement du point de contact sur la courbe K, se confond avec la courbure du cercle de courbure. C'est pour cela que le centre N d'un cercle de courbure est appelé *centre de courbure* de la courbe K au point A, et son rayon AN est dit *rayon de courbure* de la courbe K au point A.

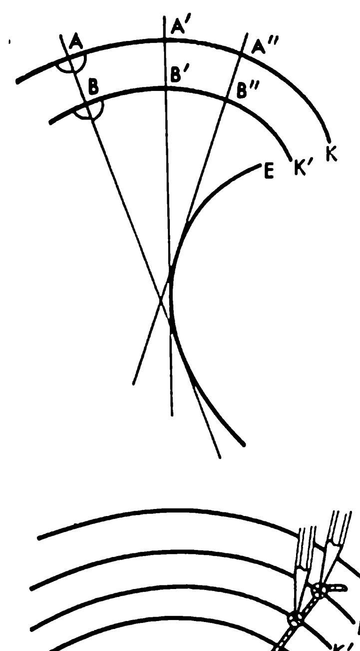


Fig. 68

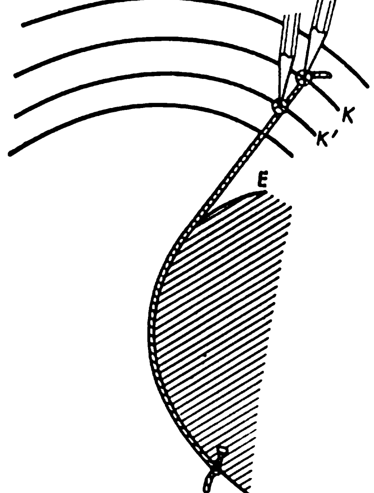


Fig. 69

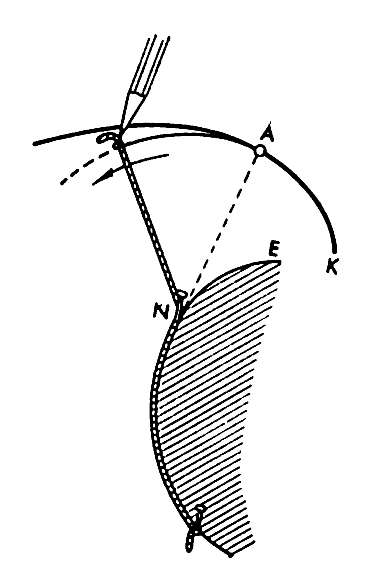


Fig. 70

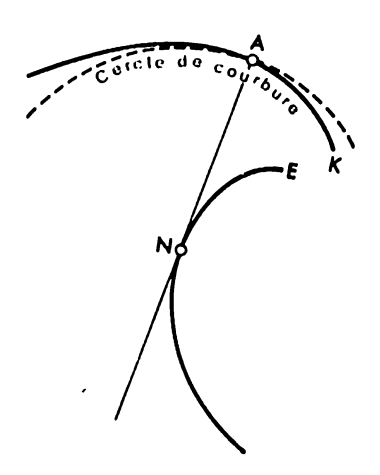


Fig. 71

Donc, le rayon de courbure de la courbe K au point A (on le désigne par ρ_A) est égal à la longueur d'un segment de la normale, compris entre les points A et N, ce dernier étant le point de contact de la normale et de la développée, le centre de courbure (point N) se trouvant sur la développée. Autrement dit, la *développée E de la courbe K est le lieu géométrique des centres de courbure de la courbe considérée.* Il est à noter que l'égalité (76) exprime le théorème géométrique suivant : la *longueur de l'arc de développée est égale à la différence des rayons de courbure correspondant aux extrémités de cet arc* (c.-à-d. $\overset{\frown}{NN'} = \rho_A - \rho_{A'}$).

Donc, la développée est étroitement liée par ses propriétés géométriques avec la courbe K. Nous allons montrer sans démonstration comment, à partir de l'équation de la courbe K, on peut trouver l'équation de sa développée. Soit une courbe K définie par l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

Prenons un point arbitraire A, appartenant à la courbe K, désignons par α et β ses coordonnées. Etant donné que le point A appartient à la courbe K, ses coordonnées α et β vérifient l'équation de cette courbe, c.-à-d.

$$f(\alpha, \beta) = 0. \qquad (77)$$

Dans les mathématiques supérieures on démontre qu'une normale à la courbe K, tracée en un point A, a pour l'équation

$$(y-\beta)\, f'_\alpha(\alpha, \beta) - (x-\alpha)\, f'_\beta(\alpha, \beta) = 0. \qquad (78)$$

Ainsi, la famille des normales de la courbe K est déterminée par l'équation (78) renfermant les paramètres α, β qui sont liés par la relation (77). Pour trouver l'enveloppe de cette famille, c.-à-d. la développée, il faut appliquer le théorème 2.

Nous donnerons plus bas sans démonstration trois exemples.

La développée de l'ellipse (75) est la courbe

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

(fig. 72, *a* et *b*) ; cette courbe s'obtient de l'astroïde par son « extension » le long de l'axe des ordonnées. La développée

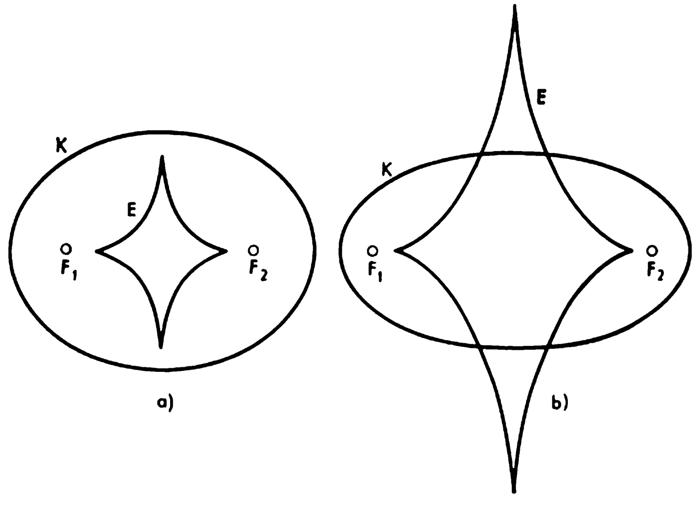


Fig. 72

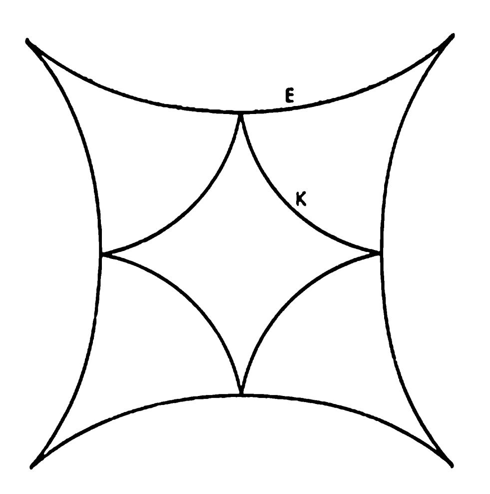


Fig. 73

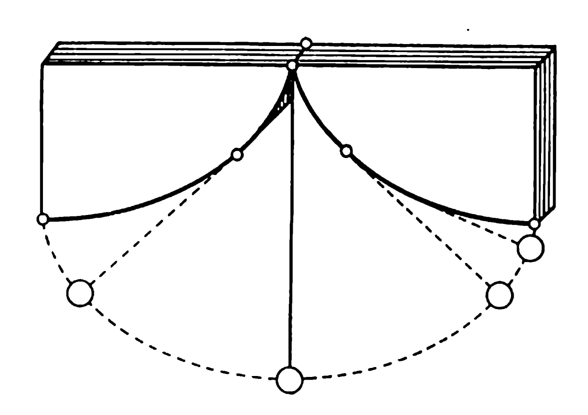


Fig. 74

de l'astroïde

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$$

(cf. p. 89) est une nouvelle astroïde que l'on obtient de la première par la similitude d'angle 45° et de rapport 2 (fig. 73). Notons, enfin, que la développée de la cycloïde supérieure, représentée sur la fig. 43 du chapitre III, est la cycloïde inférieure. Par conséquent, la cycloïde supérieure est une développante de la cycloïde inférieure. Ce principe est à la base d'un *pendule cycloïdal* (fig. 74).

Pour plus de détail, voir le livre de G. Berman « Cycloïde », où le lecteur trouvera beaucoup de faits intéressants tirés de géométrie et de mécanique en rapport avec cycloïde, astroïde et autres courbes que l'on obtient lors du roulement d'un cercle.

A. Fétissov

Démonstrations géométriques

INTRODUCTION

Un jour, tout au début de l'année scolaire, j'ai eu l'occasion d'assister à la conversation de deux petites filles, l'aînée faisant ses études à la cinquième et la cadette à la sixième. Les petites échangeaient de vues sur les leçons, instituteurs, amies, matières nouvelles, etc. L'aînée avait été frappée par des leçons de géométrie: « C'est étonnant quand même de voir un maître venir en classe, dessiner sur le tableau deux triangles égaux pour démontrer ensuite pendant toute la leçon qu'ils sont égaux. On n'y voit goutte — pourquoi faire ? ». « Mais comment vas-tu réciter ta leçon ? »— demanda la cadette. « Je n'en sais rien, le mieux est d'apprendre probablement tout ça par cœur, mais le plus ennuyeux c'est de retenir où il faut mettre toutes ces lettres... ».

Le soir même j'ai vu cette fille répéter avec zèle sa leçon : « Pour démontrer ce théorème superposons le triangle $A'B'C'$ à celui ABC... superposons le triangle $A'B'C'$ à celui ABC... », et cela à n'en pas finir. Malheureusement je n'ai pas eu l'occasion d'apprendre par la suite la note qu'elle avait reçue, mais je suis tout de même certain qu'elle avait toutes les peines du monde à apprendre son cours de géométrie.

Quelques jours plus tard mon voisin Anatole, élève de la cinquième, lui aussi, m'a formulé à son tour ses griefs à la géométrie. On leur a donné à apprendre le théorème où l'on démontrait que l'angle extérieur de tout triangle est plus grand que l'angle intérieur qui n'est pas adjacent supplémentaire du premier. Tout en me faisant voir un dessin (fig. 1) dans un manuel de géométrie, il m'a demandé: « Pourquoi faire une démonstration aussi longue que compliquée quand du dessin même on voit très bien que l'angle extérieur du triangle est obtus et ceux intérieurs, qui ne sont pas adjacents supplémentaires de l'angle obtus, sont aigus ? Et un angle obtus est toujours plus grand que celui

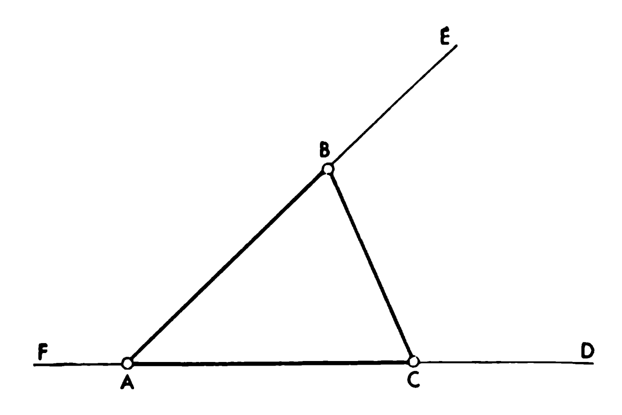


Fig. 1

aigu,— a insisté Anatole, en faisant jouer tous les moyens de persuasion,— cela est parfaitement clair sans aucune démonstration ». Je me suis donc vu obligé d'expliquer à mon interlocuteur que, loin d'être évidente, cette proposition exige nécessairement une démonstration.

Pour terminer, encore un exemple. Tout récemment encore un élève au niveau de troisième classe m'a montré son travail de contrôle dont la note avait été « injustement », à en croire ses paroles, minimisée. Ce problème le voici. On examinait un trapèze isocèle de bases de 9 et de 25 cm et de côté latéral de 17 cm et il fallait déterminer sa hauteur. Pour résoudre ce problème on a inscrit dans ce trapèze une circonférence, tout en notant que vu le théorème sur un quadrilatère circonscrit (dont les sommes des côtés opposés sont égales) cela était parfaitement possible ($9 + 25 = 17 + 17$). Puis on a déterminé la hauteur comme diamètre de la circonférence inscrite dans le trapèze isocèle, ce diamètre étant égal à la moyenne proportionnelle entre les bases du trapèze (ce théorème avait déjà été démontré).

Toute convaincante et simple que puisse paraître cette solution du problème, le maître a fait tout de même remarquer qu'on n'y était pas en droit de s'en rapporter au théorème sur un quadrilatère circonscrit. Mon élève est resté donc absolument perplexe: « Mais comment se fait-il ? On sait très bien que les sommes des côtés opposés d'un quadrilatère circonscrit sont égales. Et du fait que la somme des bases du trapèze donné est égale à la somme de ses côtés latéraux il s'ensuit inévitablement qu'on peut bien inscrire dans ce trapèze une circonférence, n'est-ce pas ? Où est donc ma faute ? »

De tels exemples sont à n'en pas finir. Nombreux sont les élèves à ne pas comprendre pourquoi il faut démontrer des vérités apparemment évidentes; parfois, de plus, les démonstrations semblent avoir une forme trop compliquée et difficile à assimiler. Mais il arrive souvent en revanche que les démonstrations, on ne peut mieux, s'avèrent absolument erronées.

L'auteur de ce petit livre se propose donc comme but d'aider les élèves à se débrouiller dans les questions suivantes:

1) Qu'est-ce qu'une démonstration géométrique ?

2) A quoi sert une démonstration géométrique ?

3) Quelle doit être une démonstration ?

4) Qu'est-ce qu'on admet en géométrie sans démonstration préalable ?

I. QU'EST-CE QU'UNE DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE?

1. Posons donc la question suivante : qu'est-ce qu'une démonstration géométrique ? Vous voici en train de convaincre votre interlocuteur du fait que la Terre a la forme d'une sphère. Vous parlez de l'élargissement de l'horizon à mesure qu'on monte au-dessus de la surface terrestre, de voyages autour du monde, de l'ombre ronde que projette la Terre sur la Lune lors des éclipses de Lune, etc.

Chacun de ces énoncés que vous cherchez à persuader à votre interlocuteur s'appelle *argument* de la démonstration, et l'ensemble d'arguments — *argumentation*. En quoi consiste donc la force probante d'un argument ? Examinons à titre d'exemple le dernier des arguments cités plus haut. On affirme que la Terre doit être ronde, étant donné que son ombre est ronde. Cette affirmation a pour raison le fait que le bon sens des hommes leur suggère l'idée que tous les corps ayant la forme d'une sphère projettent une ombre ronde et, inversement, une forme ronde de l'ombre en différentes positions d'un corps est due à la forme sphérique des corps. Ainsi dans le cas considéré nous nous appuyons avant tout sur des faits, sur notre expérience directe du monde qui nous a fait savoir les propriétés des corps du monde matériel environnant. Ensuite nous faisons appel à la déduction dont voici une esquisse approximative.

«Tous les corps projetant dans des différentes positions une ombre ronde ont une forme sphérique ». « Lors des éclipses de Lune la Terre, tout en se trouvant dans des positions différentes par rapport à la Lune, projette sur la Lune une ombre ronde ». Conclusion : « Par conséquent, la Terre a la forme d'une sphère ».

Donnons encore un exemple emprunté à la physique. Dans les années 60 du siècle passé le physicien écossais Max-

well a établi l'identité de vitesse entre la lumière et la propagation d'un ébranlement électromagnétique. Ce fait lui a suggéré une idée (hypothèse) que la lumière était également constituée par les ondes électromagnétiques. Pour démontrer la justesse de cette hypothèse il fallait trouver, outre le fait que les ondes électromagnétiques et de lumière ont la même vitesse de propagation, d'autres arguments assez probants pour prouver l'identité de la nature de ces deux phénomènes. De tels arguments ont été fournis par des expériences qui ont montré l'influence manifeste des champs électrique et magnétique sur la nature du rayonnement de lumière émis par des sources différentes. De plus, toute une série d'autres facteurs a incontestablement démontré la nature identique des ondes de lumière et électromagnétiques.

Voici, enfin, un exemple arithmétique. Prenons des nombres impairs quelconques, élevons au carré et diminuons chacun de ces carrés d'une unité. Par exemple:

$$7^2 - 1 = 48; \quad 11^2 - 1 = 120; \quad 5^2 - 1 = 24;$$
$$9^2 - 1 = 80; \quad 15^2 - 1 = 224,$$

etc. Si l'on examine les nombres ainsi obtenus, on note leur propriété commune, à savoir: chacun de ces nombres se divise par 8 sans reste. Ainsi, en procédant de la même façon avec d'autres nombres impairs et en obtenant le même résultat, on est amené à formuler l'hypothèse suivante: « Le carré de tout nombre impair diminué de l'unité donne un multiple de 8 ».

Vu qu'il s'agit de tout nombre impair, pour démontrer cette hypothèse il faut citer des arguments valables pour c h a q u e nombre impair. Ayant ceci en vue, rappelons-nous que tout nombre impair a la forme $2n - 1$, où n est un nombre naturel quelconque. Le carré d'un nombre impair diminué d'une unité prend alors la forme $(2n - 1)^2 - 1$. En ouvrant les parenthèses, on obtient: $(2n - 1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n + 1 - 1 = 4n^2 - 4n = 4n(n - 1)$.

L'expression obtenue représente un multiple de 8 pour tout n naturel. En effet, le facteur 4 signifie que le nombre $4n(n-1)$ est multiple de 4. De plus, $n-1$ et n sont deux nombres naturels successifs, donc l'un est nécessairement un nombre pair; par conséquent, l'expression considérée a le nombre 2 pour facteur.

Ainsi, le nombre $4n(n-1)$ est toujours multiple de 8, ce qu'il fallait démontrer.

Ces exemples aident à se faire une idée des voies que suit notre connaissance du monde environnant, de ses phénomènes, objets et régularités. La première consiste à analyser toute une série d'observations et d'expériences sur des phénomènes et objets pour en déceler des lois générales. Sur des exemples cités plus haut on peut voir que grâce aux observations directes les hommes sont parvenus à établir la dépendance entre la forme d'un corps et son ombre; les observations et expériences multiples ont confirmé la nature électromagnétique de la lumière; enfin, les opérations effectuées sur des carrés des nombres impairs ont permis d'établir la propriété de ces carrés diminués d'une unité. Cette voie, lorsque le raisonnement va du particulier au général, des faits aux lois, s'appelle *induction* (lat. *inductio*).

Une autre voie, lorsque le raisonnement va du général au particulier, s'appelle *déduction* (lat. *deductio*). Ainsi, dans le dernier exemple ci-dessus nous avons appliqué certaines lois générales d'arithmétique à un cas particulier, pour démontrer l'existence d'une propriété quelconque de tout nombre impair.

D'où l'on voit bien que l'induction et la déduction sont inséparables. Leur unité représente donc un trait particulier de la pensée scientifique.

Il est facile de voir que toute démonstration suit ces deux voies. Afin de trouver les arguments pour la démonstration d'une hypothèse quelconque on s'adresse à l'expérience, aux observations, aux faits ou, enfin, à des propo-

sitions justes, déjà démontrées. Les données ainsi obtenues nous permettent d'en venir à la conclusion en ce qui concerne la justesse ou la fausseté de l'hypothèse considérée.

2. Revenons quand même à la géométrie qui a pour objet l'étude des propriétés de l'espace du monde matériel. On appelle les propriétés « de l'espace » celles qui déterminent la forme, les dimensions et la position mutuelle des corps. Il est évident que l'activité pratique des hommes nécessite la connaissance de telles propriétés des corps. Les connaissances géométriques initiales ont été accumulées par l'homme inductivement en se basant sur un très grand nombre d'observations et d'expériences. Mais le processus même d'accumulation de vérités géométriques a fait voir que beaucoup parmi elles peuvent être obtenues à partir des autres vérités par la déduction sans qu'on ait recours à l'expérience.

Ainsi, par exemple, toute une série d'observations et l'expérience nous amènent à la conclusion que « par deux points différents il passe exactement une droite ». En se servant de cette vérité on peut affirmer (abstraction faite de l'expérience) que « deux droites différentes passent au plus par un point commun». Les raisonnements suivants fort simples permettent d'arriver à cette nouvelle vérité. En effet, si l'on admet qu'il existe deux droites différentes ayant au moins deux points en commun, il s'ensuit que par deux points passent deux droites différentes, ce qui contredit l'énoncé primaire.

L'activité pratique des hommes a permis d'etablir un grand nombre de vérités géométriques qui reflètent nos connaissances spatiales du monde matériel. Leur étude détaillée a montré que les unes s'obtiennent des autres par la déduction logique. Ce fait a suggéré une idée de choisir parmi toutes les notions géométriques les plus simples et portant un caractère général qu'on adopte sans démonstration préalable, toutes les autres propriétés et dépendances géométriques étant déduites de ces notions fondamentales.

Une telle idée a fait son apparition à l'époque même de l'antiquité: les géomètres de la Grèce antique ont déjà commencé à systématiser les vérités géométriques connues en les déduisant des propositions fondamentales relativement peu nombreuses. 300 ans avant notre ère le géomètre grec Euclide d'Alexandrie a fait un exposé le plus complet de la base axiomatique de la géométrie de son époque. Dans cet exposé on a choisi des propositions adoptées sans démonstration, ce qu'on appelle *axiomes* (gr. axiôma, estimation). Toutes les autres propositions dont la justesse nécessite une démonstration s'appellent *théorèmes* (gr. théôrèma, objet d'étude).

Le système d'Euclide est resté en vigueur bien des siècles et aujourd'hui même les cours d'école géométriques sont, sous un certain aspect, grandement influencés par ce système. Ainsi, la base axiomatique se compose d'un nombre relativement petit des vérités fondamentales — axiomes, obtenues par l'induction et adoptées sans démonstration préalable, toutes les autres étant déduites de celles-ci.

Aujourd'hui les géomètres s'appliquent à déterminer tous les axiomes nécessaires pour construire une base axiomatique et à diminuer autant que possible leur nombre. Même la fin du XIXe siècle a déjà vu commencer ces travaux mais, bien qu'on ait enregistré des progrès importants, ils sont loin d'être terminés.

En résumant l'exposé ci-dessus on peut répondre à la question posée: qu'est-ce qu'une démonstration géométrique ? Comme on l'a vu une démonstration représente donc un système de déductions qui sert à démontrer la justesse d'une hypothèse en faisant appel aux axiomes et énoncés déjà démontrés.

Il ne reste pour terminer qu'à répondre à une question: où sont les garants de la justesse des propositions ainsi déduites ? La justesse d'une conclusion déductive réside dans le fait qu'on y applique certaines lois d'ordre géné-

ral à des cas particuliers, étant donné qu'il est parfaitement évident que tout ce qui est juste toujours et en général le restera dans chaque cas particulier.

Si l'on dit, par exemple, que la somme des angles de tout triangle est égale à 180° et que la figure ABC est un triangle, nul doute que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$. Une étude plus détaillée de la géométrie fait la preuve du caractère identique de nos raisonnements géométriques.

II. À QUOI SERT UNE DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE?

1. Essayons maintenant de répondre à la deuxième question : « A quoi sert une démonstration géométrique ? » .

La nécessité de la démonstration est une conséquence de l'une des lois fondamentales de la logique (science des lois de la pensée), *principe de la raison suffisante.* Cette loi exige que toute affirmation une fois formulée soit bien argumentée de façon à confirmer sa justesse et sa concordance avec des faits et une réalité. Ces arguments peuvent être représentés aussi bien par l'indication sur la possibilité de sa vérification expérimentale que par un raisonnement rigoureux avec un système de déductions.

En mathématiques prédomine l'argumentation de ce dernier type.

La démonstration d'une hypothèse géométrique a pour objet l'établissement de son authenticité par la déduction logique tirée des vérités connues ou une fois démontrées.

Mais la question suivante se pose alors tout à fait naturellement : faut-il recourir à une démonstration si une hypothèse à démontrer est assez évidente sans aucune démonstration?

C'est à peu près le point de vue des mathématiciens indiens de l'époque du Moyen Âge. Au lieu de démontrer certaines hypothèses géométriques ils se sont bornés à les accompagner de dessins assez expressifs avec une inscription éloquente « regarde ! ». Voici, par exemple, le théorème de Pythagore dans l'interprétation du mathématicien indien Bkhaskara Atcharia empruntée de son livre « Lilavati » (fig. 2). En examinant ces deux dessins le lecteur doit « découvrir » que dans un triangle rectangle le carré construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des carrés construits sur les autres côtés.

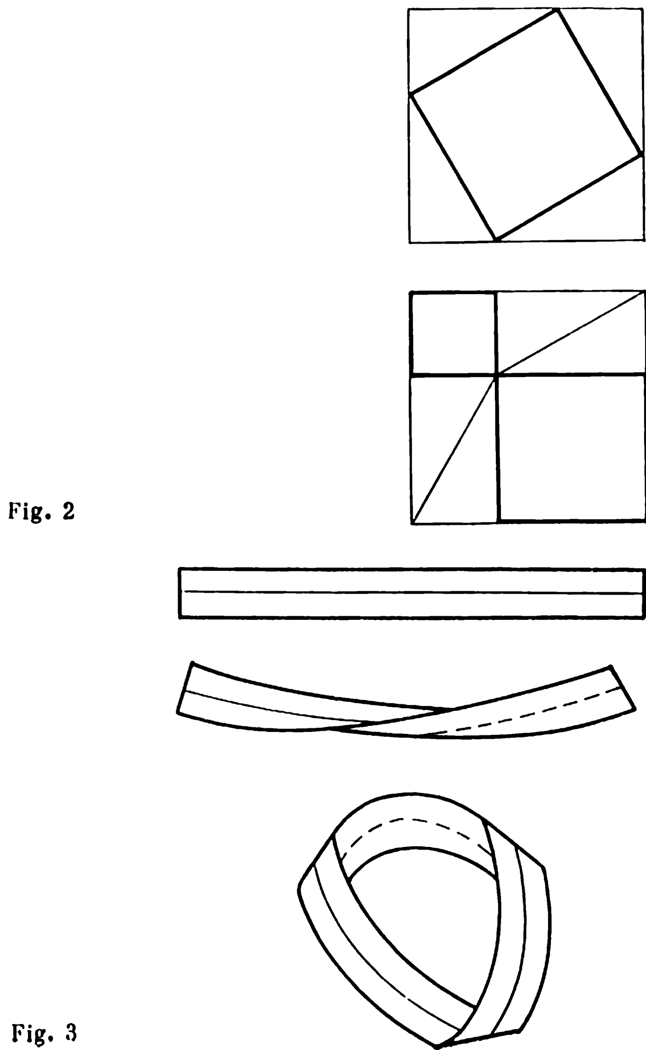


Fig. 2

Fig. 3

Peut-on dire que dans ce cas il n'y a pratiquement aucune démonstration ? Bien sûr que non ! Si le lecteur regarde tout simplement ces dessins sans faire appel aux raisonnements, il est peu probable qu'il en vienne à une conclusion quelconque. Mais l'auteur suppose évidemment que le lecteur non seulement regarde mais qu'il réfléchisse en même temps à ces dessins. Le lecteur doit comprendre qu'il voit deux carrés égaux dont les aires sont naturellement égales. Le premier se compose de quatre triangles rectangles égaux et d'un carré construit sur l'hypoténuse et le deuxième, de quatre triangles rectangles identiques et de deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Il ne reste qu'à comprendre que si de deux grandeurs égales (aires de deux grands carrés égaux) on retranche une même grandeur (aires de quatre triangles rectangles), on obtient des aires identiques: dans le premier cas — un carré construit sur l'hypoténuse, dans le deuxième — deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Comme on le voit, l'évidence y est insuffisante, il faut de plus savoir réfléchir et raisonner.

Mais peut-il se faire qu'il existe quand même dans la géométrie des théorèmes dont la justesse est tellement évidente qu'on peut les admettre sans aucun raisonnement ?

Avant tout il faut dire que dans les sciences exactes il est impossible d'avoir constamment recours à l'évidence, étant donné que la notion « d'évidence » est extrêmement imprécise et instable: le même fait peut bien être évident pour un individu et fort douteux pour l'autre. Il suffit pour cela de se rappeler comment intérprètent, par exemple, un même évènement les témoins pour comprendre dans quelle mesure il est difficile d'établir la vérité d'après les dépositions des prétendus « témoins oculaires ».

Donnons un exemple géométrique fort intéressant qui montre que l'évidence apparente peut être trompeuse. On prend une feuille de papier sur laquelle on trace une ligne continue fermée et on la coupe ensuite suivant cette ligne.

La question se pose de savoir : quelle forme aura cette feuille les extrémités de coupe étant réunies ? Beaucoup de lecteurs diront probablement sans trop réfléchir qu'elle se divisera en deux. Mais il peut s'avérer qu'une telle reponse ne soit pas juste. Faisons une expérience suivante : prenons un ruban de papier et collons ensemble ses extrémités en retournant au préalable l'une d'elles de façon qu'il se forme un anneau. On obtient ainsi ce qu'on appelle « *ruban de Moebius* » (fig. 3). (Moebius, mathématicien allemand, qui avait étudié les surfaces de cette forme.) Si l'on coupe maintenant cette feuille suivant la ligne fermée tracée le long du ruban en veillant à ce que la coupure a lieu approximativement au milieu du ruban, alors la feuille ne se divisera pas en deux, nous aurons toujours une seule feuille. Ces faits donnent à réfléchir à quel point faut-il se fier à l'« évidence ».

2. Essayons d'analyser plus en détail ce problème. En tant qu'un exemple considérons le cas par lequel nous avons commencé notre exposé. Notre écolière a été bien frappée de voir l'instituteur dessiner deux triangles égaux pour démontrer ensuite le fait apparemment évident qu'ils sont égaux. En réalité il s'agissait bien d'autre chose : l'instituteur n'a jamais dessiné des triangles égaux, mais en traçant le triangle ABC (fig. 4) il a tout simplement dit que le triangle $A'B'C'$ est construit de façon que $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ et $\hat{B} = \hat{B}'$ en soulignant qu'on ne connaît rien sur l'égalité de $\hat{A}'$ et $\hat{A}$, $\hat{C}'$ et $\hat{C}$ et des côtés $A'C'$ et AC (c'est qu'il n'a pas construit les angles A' et C' identiques à $\hat{A}$ et $\hat{C}$ et le côté $A'C'$ égal à AC).

Ainsi, dans ce cas nous devons, en partant des données $A'B' = AB$; $B'C' = BC$ et $\hat{B}' = \hat{B}$, déduire l'égalité des triangles, c.-à-d. l'égalité de tous les autres éléments, mais pour cela il faut évidemment raisonner, autrement dit, construire une démonstration. Il est facile

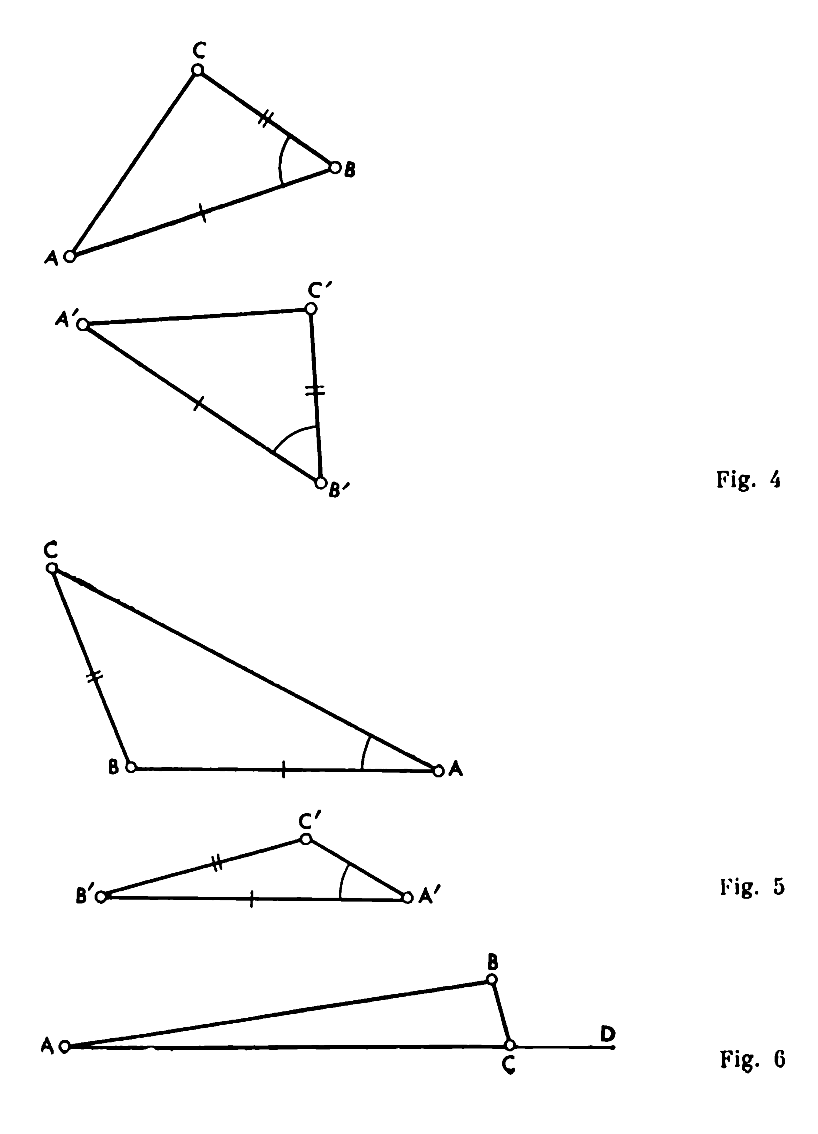


Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

de montrer que l'égalité des triangles ayant trois couples d'éléments correspondants égaux est loin d'être « évidente », comme cela peut apparaître à première vue. Modifions quelque peu l'hypothèse du premier théorème sur l'égalité des triangles: soit deux triangles ayant deux côtés égaux deux à deux et les angles égaux qui ne sont pas compris entre les côtés égaux, mais sont opposés à l'un d'eux, BC et $B'C'$ par exemple. Pour les triangles ABC et $A'B'C'$ on aura alors $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ et $\hat{A}' = \hat{A}$. Que pouvons-nous dire de tels triangles ? A en juger par analogie avec le premier cas de l'égalité des triangles on peut s'attendre à ce que cette fois-ci les triangles sont de même égaux mais la fig. 5 ne laisse aucun doute que les triangles ABC et $A'B'C'$, bien qu'ils satisfassent aux hypothèses $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ et $\hat{A}' = \hat{A}$, sont loins d'être égaux.

Les exemples de ce type nous obligent à être attentifs à nos raisonnements tout en faisant voir que seule une démonstration correcte peut assurer l'authenticité des propositions à démontrer.

3. Passons maintenant au deuxième théorème, notamment, au théorème sur l'angle extérieur d'un triangle, problème qui a bouleversé mon voisin Anatole. En effet, on voit bien sur le dessin en question emprunté d'un manuel de géométrie que l'angle extérieur est obtus et les angles intérieurs, qui ne lui sont pas adjacents, aigus. Cela saute même aux yeux. Mais peut-on en conclure que cela nous délivre de toute démonstration ? Bien sûr que non ! Car dans ce théorème il s'agit non seulement d'un triangle de forme déterminée mais de t o u t triangle dont la forme peut être bien autre que celle représentée dans le manuel.

Supposons, par exemple, que le point A s'éloigne du point C suivant une droite. On obtient alors le triangle ABC (fig. 6) de la forme telle que l'angle au point B est obtus lui aussi. Si le point A s'éloigne du point C, disons, à 10 mètres, dans ce triangle étiré un simple rapporteur d'école ne distinguera tout simplement pas l'angle inté-

rieur *B* de celui extérieur. Et si, par exemple, le point *A* s'éloigne du point *C* à une distance égale à celle de la Terre au Soleil, alors tout instrument goniométrique des plus modernes sera impuissant à distinguer ces angles. D'où il devient clair que pour ce théorème lui aussi on ne peut pas parler de l' « évidence ». Une démonstration rigoureuse de ce théorème n'est pas liée à la forme fortuite du triangle représenté sur le dessin et montre que le théorème sur l'angle extérieur est parfaitement valable pour n'importe quels triangles indépendamment de longueurs relatives de leurs côtés. C'est pourquoi même dans les cas où la différence entre les angles extérieur et intérieur est à tel point insignifiante qu'elle échappe à nos instruments de mesure, nous sommes quand même certains qu'elle existe toujours. Car nous avons démontré que l'angle extérieur d'un triangle est toujours et dans tous les cas plus grand que tout angle intérieur qui n'est pas supplémentaire du premier.

En rapport avec cet exemple il convient de souligner le rôle du dessin pour toute démonstration géométrique. Mais il est à retenir que le dessin n'est qu'un moyen auxiliaire de la démonstration, qu'il ne représente qu'un exemple, un cas particulier de toute une classe de figures géométriques, que vise le théorème considéré. Il importe donc de savoir distinguer sur le dessin des propriétés communes, générales d'une figure géométrique de celles accidentelles et particulières. Ainsi, par exemple, le fait que sur le dessin qui illustre dans le manuel le théorème considéré l'angle extérieur est obtus et ceux intérieurs — aigus s'avère absolument fortuit. Il est alors clair qu'il serait injustifié d'avoir recours à de tels faits accidentels pour la démonstration d'une propriété commune à tous les triangles.

Une particularité essentielle de la démonstration géométrique qui la rend d'ailleurs absolument indispensable réside dans le fait que celle-ci permet d'établir certaines

propriétés *générales* des figures de l'espace. Si la démonstration est correcte et est basée sur des données initiales justes, cela nous donne la certitude absolue de la justesse de la proposition à démontrer. C'est pour cette raison qu'on est sûr que tout théorème géométrique, celui de Pythagore par exemple, soit vrai pour tous les triangles quels que soient leurs côtés, de quelques millimètres jusqu'aux millions de kilomètres.

4. Il existe, enfin, encore une raison fort importante prédéterminant la nécessité de la démonstration. Le fait est que la géométrie représente non pas un assortiment de vérités fortuites appelées à décrire les propriétés de l'espace des corps, mais un *système scientifique* fondé sur des strictes lois. Chaque théorème est organiquement lié dans ce système à tout un ensemble de propositions déjà démontrées. La démonstration est donc appelée à mettre en évidence ces rapports. Ainsi, par exemple, la démonstration du théorème bien connu sur la somme des angles intérieurs d'un triangle est basée sur les propriétés des droites parallèles, ce qui fait immédiatement voir les rapports directs entre la théorie des droites parallèles et les propriétés des sommes des angles intérieurs de polygones. De même toute la théorie de la similitude des figures géométriques est bâtie sur les propriétés des droites parallèles.

Chaque théorème géométrique est donc lié par tout un système de déductions à des théorèmes déjà démontrés qui à leur tour, le sont à ceux démontrés plus tôt, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à des axiomes et définitions fondamentales sur lesquels repose tout l'édifice de géométrie. Ces liens sont faciles à suivre en prenant n'importe quel théorème géométrique et en examinant toutes les propositions qui lui servent de fondement.

En résumant ce bref exposé sur la nécessité de la démonstration, on peut en conclure :

a) On n'admet en géométrie sans démonstration qu'un nombre restreint de vérités fondamentales, axiomes. Toutes

les autres propositions, théorèmes, doivent être déduites de ces axiomes. La justesse des axiomes mêmes, ainsi que des théorèmes démontrés à l'aide de ces axiomes découle de l'expérience multiséculaire et de nombreuses observations.

b) La démonstration s'avère être nécessaire en vertu d'une des lois fondamentales de notre pensée — principe de la raison suffisante, qui exige un bien-fondé rigoureux de toutes nos affirmations.

c) Dans une démonstration correcte on ne peut avoir recours qu'à des propositions déjà démontrées, sans prétexter l'évidence d'aucune façon *).

d) La démonstration s'avère être nécessaire ne serait-ce que vu le caractère général d'une hypothèse pour pouvoir donc l'appliquer à tous les cas particuliers.

e) La démonstration permet, enfin, de faire des vérités géométriques un système harmonieux des connaissances scientifiques, faisant voir les rapports intrinsèques entre les différentes propriétés des formes de l'espace.

---

*) Bien des hypothèses scientifiques dont l'évidence avait été incontestable se sont avérées fausses par la suite. Toute hypothèse scientifique exige une démonstration rigoureuse.

III. QUELLE DOIT ÊTRE UNE DÉMONSTRATION?

1. Passons maintenant au problème suivant: à quelles conditions doit satisfaire la démonstration pour que l'on puisse la considérer comme correcte, c.-à-d. pour qu'elle puisse garantir la justesse de la déduction partant des prémisses justes? Notons avant tout que chaque démonstration se compose d'une série de déductions, donc la justesse ou la fausseté de la démonstration dépendent de la justesse ou de la fausseté de ses déductions.

Comme nous l'avons vu plus haut, toute déduction représente l'application d'une certaine loi générale à un cas particulier. Afin d'éviter toute erreur dans la déduction il faut retenir certains schémas pour savoir représenter les rapports entre toutes les notions, y compris celles géométriques. Pour plus de clarté citons un exemple. Supposons qu'on ait une déduction: 1) Les diagonales de tous les rectangles sont égales. 2) Tous les carrés sont des rectangles. 3) Conclusion: les diagonales de tous les carrés sont égales.

En quoi consistent donc nos raisonnements? La première proposition établit une certaine loi générale qui affirme que tous les rectangles, c.-à-d. toute une classe des figures géométriques appelées rectangles, appartiennent à la classe des quadrilatères dont les diagonales sont égales. La deuxième proposition consiste en affirmation que toute la classe des carrés représente une partie de la classe des rectangles. Ainsi nous pouvons en conclure à juste raison que toute la classe des carrés est une partie de la classe des quadrilatères dont les diagonales sont égales. Exprimons cette déduction sous une forme générale. Désignons par P la plus vaste classe (quadrilatères dont les diagonales sont égales), par M la classe intermédiaire (rectangles) et, enfin, par S la plus petite classe (carrés). Alors notre déduction prendra la forme schématique suivante:

1) Tous les M sont P.

2) Tous les S sont M.

3) Conclusion : tous les S sont P.

Cette relation admet une interprétation graphique fort simple. Représentons la plus vaste classe P sous forme d'un grand cercle (fig. 7), la classe M, sous forme d'un cercle plus petit entièrement compris à l'intérieur du premier. La classe S prendra alors la forme d'un cercle encore plus petit disposé complètement à l'intérieur du deuxième. Nul doute que pour une telle disposition de cercles le cercle S se trouve entièrement inclus dans le cercle P.

Notons qu'une telle image de rapports entre des notions avait été introduite par le grand mathématicien Leonhard Euler (1707-1783), membre de l'Académie des Sciences de St-Pétersbourg.

Le schéma de ce type permet de représenter également d'autres formes de déductions. Examinons encore une déduction qui amène à la conclusion négative :

1) Tous les quadrilatères dont la somme des angles opposés n'est pas égale à 180° ne peuvent pas être inscrits dans le cercle.

2) La somme des angles opposés d'un parallélogramme obliquangle n'est pas égale à 180°.

3) Conclusion : le parallélogramme obliquangle ne peut pas être inscrit dans le cercle. Désignons par P la classe des quadrilatères qu'on ne peut pas inscrire dans le cercle, par M celle dont la somme des angles opposés n'est pas égale à 180° et par S, la classe des parallélogrammes obliquangles. Notre déduction prendra alors la forme suivante :

1) Aucun M n'est P.

2) Tous les S sont M.

3) Conclusion : aucun S n'est P.

Cette relation peut également être représentée d'une manière évidente à l'aide de cercles d'Euler (fig. 8).

La majorité écrasante des déductions géométriques sont conformes à ces deux schémas.

2. Une telle image de rapports existant entre les notions

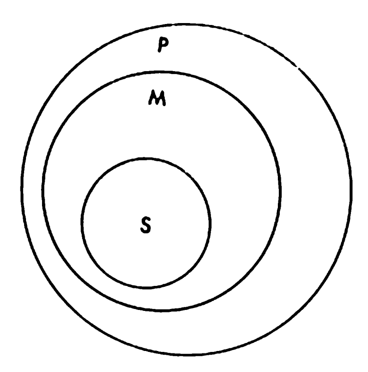


Fig. 7

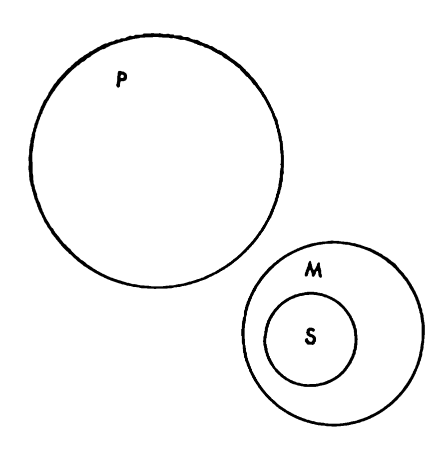


Fig. 8

géométriques permet de mieux comprendre la structure de toute déduction et de révéler des erreurs dans les déductions erronées.

A titre d'exemple examinons le raisonnement d'un élève de troisième mentionné plus haut et que l'instituteur avait reconnu faux. Le voici :

1) Les sommes des côtés opposés de tous les quadrilatères circonscrits sont égales.

2) Les sommes des côtés opposés du trapèze donné sont égales.

3) Conclusion : le trapèze donné peut être circonscrit au cercle.

Si l'on désigne par P la classe des quadrilatères circonscrits, par M celle dont les sommes des côtés opposés sont égales et par S la classe des trapèzes dont la somme des bases est égale à celle des côtés latéraux, les raisonnements ci-dessus peuvent être ramenés au schéma suivant :

1) Tous les P sont M.

2) Tous les S sont M.

3) La conclusion : « tous les S sont P » est fausse, car en représentant les rapports entre les classes à l'aide de cercles d'Euler (fig. 9), il est aisé de voir que, bien que P et S soient entièrement inclus dans M, on ne peut rien dire sur la relation entre S et P.

Pour mieux voir la fausseté de la conclusion ainsi obtenue donnons à titre d'exemple une déduction tout à fait analogue :

1) La somme de tous les angles adjacents supplémentaires est égale à 180°.

2) La somme de deux angles donnés est égale à 180°.

3) Conclusion : par conséquent, ces deux angles sont adjacents supplémentaires. Cette conclusion est certainement fausse, car ces deux angles peuvent être égaux en somme à 180°, sans être adjacents (angles opposés d'un quadrilatère inscrit par exemple). D'où viennent donc de telles erreurs? La cause en est que celui qui raisonne ainsi cite

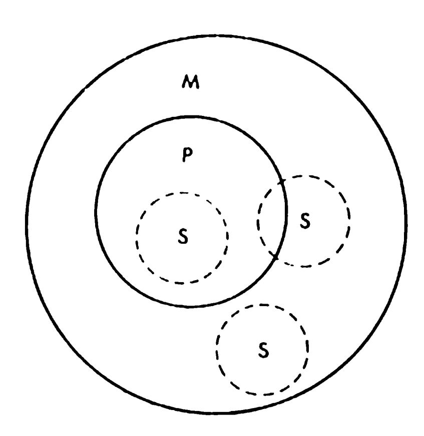


Fig. 9

au lieu d'un théorème réciproque celui direct. L'exemple ci-dessus concernant un quadrilatère circonscrit a pour base le théorème qui dit que les sommes des côtés opposés d'un quadrilatère circonscrit sont égales. La démonstration de la réciproque, à savoir : « dans tout quadrilatère dont les sommes des côtés opposés sont égales on peut inscrire un cercle » ne figure pas dans le manuel de géométrie, bien qu'elle puisse être démontrée, ce que nous allons faire dans la suite.

Ce théorème une fois démontré, une déduction correcte prendrait alors la forme suivante :

1) Dans tout quadrilatère dont les sommes des côtés opposés sont égales on peut inscrire un cercle.

2) La somme des bases du trapèze donné est égale à celle des côtés latéraux.

3) Conclusion : par conséquent, dans le trapèze donné on peut inscrire un cercle. Cette conclusion est absolument juste, car elle est faite d'après le schéma représenté à la fig. 6.

1) Tous les M sont P.

2) Tous les S sont M.

3) Conclusion : tous les S sont P.

L'erreur de notre élève consistait en ce qui suit : au lieu de citer le théorème réciproque, il a choisi celui direct.

3. Démontrons maintenant ce théorème réciproque fort important.

● THÉORÈME. *Dans tout quadrilatère dont les sommes des côtés opposés sont égales on peut inscrire un cercle.*

Notons pour commencer que si dans un quadrilatère on peut inscrire un cercle, son centre est équidistant de tous ses côtés. Mais vu qu'une bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points équidistants de ses côtés, le centre du cercle inscrit se trouve sur la bissectrice de chaque angle intérieur. Ainsi donc, le centre du cercle inscrit est le point d'intersection de quatre bissectrices des angles intérieurs d'un quadrilatère.

Plus loin, si au moins trois bissectrices d'un quadrilatère se coupent en un même point, la quatrième bissectrice passe par ce même point, équidistant de tous les quatre côtés et coïncidant avec le centre du cercle inscrit. Etant donné que la démonstration de ce fait est analogue à la démonstration du théorème sur l'existence d'un cercle inscrit dans un triangle, nous laissons au lecteur le soin de le faire personnellement.

Passons maintenant à la démonstration proprement dite. Nous avons donc le quadrilatère $ABCD$ (fig. 10) qui satisfait à la relation

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (1)$$

Avant tout il nous faut éliminer de la démonstration le cas, où le quadrilatère considéré se trouve être un losange, car les diagonales du losange sont les bissectrices des angles intérieurs et leur point d'intersection coïncide avec le centre du cercle inscrit, c.-à-d. le cercle est toujours inscriptible dans le losange. Supposons donc que le quadrilatère ait deux

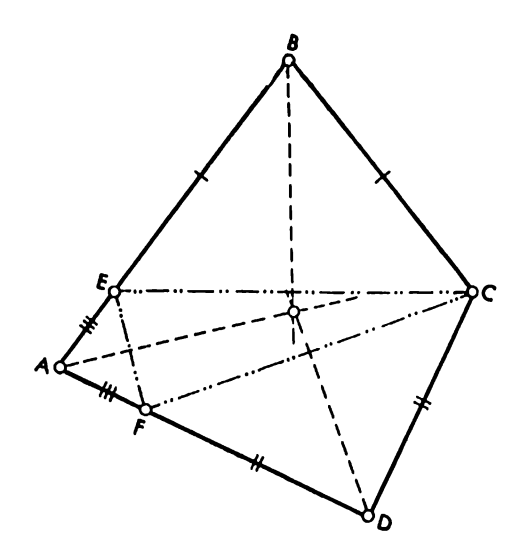


Fig. 10

côtés consécutifs inégaux. Soit, par exemple, $AB > BC$. Alors en vertu de l'égalité (1) on a : $CD < AD$. Portons sur AB le segment $BE = BC$ pour obtenir le triangle isocèle BCE. Portant ensuite sur AD le segment $DF = CD$ on obtient le triangle isocèle CDF. Nous allons démontrer que le $\triangle AEF$ est également isocèle. En effet, en mettant dans l'égalité (1) BC dans le premier membre et CD dans le second, on obtient : $AB - BC = AD - CD$, mais $AB - BC = AE$, $AD - CD = AF$. D'où $AE = AF$ et le triangle AEF est isocèle. Dans les trois triangles isocèles ainsi obtenus menons les bissectrices des angles au sommet, c.-à-d. les bissectrices des angles B, D et A. Ces trois bissectrices sont perpendiculaires aux bases CE, CF et EF et passent par leurs milieux. Par conséquent, elles représentent les perpendiculaires élevées des milieux des côtés du triangle CEF et, de ce fait, doivent se couper toutes en un même point. Par conséquent, les trois bissectrices du quadrilatère consi-

déré se coupent en un même point qui, comme on l'a dit plus haut, est le centre du cercle inscrit.

4. Comme nous venons de le dire, on tombe souvent dans l'erreur en se référant lors de la démonstration au théorème direct au lieu de sa réciproque. Il faut être très attentif à ne pas tomber dans cette piège. Ainsi, par exemple, si l'on propose aux élèves de déterminer la forme d'un triangle dont les côtés ont 3, 4 et 5 unités de longueur, ils disent souvent que c'est un triangle rectangle, étant donné que la somme des carrés construits sur ses deux côtés, $3^2 + 4^2$, est égale au carré construit sur le troisième, 5^2, en citant le théorème de Pythagore, bien qu'il soit juste de se référer à sa réciproque qui affirme que si la somme des carrés construits sur deux côtés d'un triangle est égale au carré construit sur le troisième, ce triangle est rectangle. Bien que ce théorème figure dans tout manuel d'école, on ne lui accorde souvent pas une attention suffisante d'où provient cette erreur.

Avec cela il est utile d'établir les conditions pour lesquelles les théorèmes direct et réciproque sont simultanément justes. Nous avons déjà mentionné certains cas où ces deux théorèmes sont simultanément justes, mais il existe bien des exemples quand le théorème direct est juste et sa réciproque ne l'est pas. Ainsi, par exemple, le théorème direct affirme d'une façon correcte que les angles verticaux sont égaux, tandis que sa réciproque doit affirmer que tous les angles égaux sont verticaux, ce qui est faux.

Pour rendre les rapports entre les théorèmes direct et réciproque plus concrets, faisons de nouveau appel à leur image schématique. Si le théorème direct affirme: « Tous les *S* sont *P* » (« Tous les couples d'angles verticaux l'un par rapport à l'autre sont les couples d'angles égaux »), sa réciproque doit affirmer: « Tous les *P* sont *S* » (« Tous les couples d'angles égaux sont les couples d'angles verticaux l'un par rapport à l'autre »). En représentant les rapports entre les notions du théorème direct à l'aide de cercles d'Euler (fig. 11), il est aisé de voir que du fait que la classe

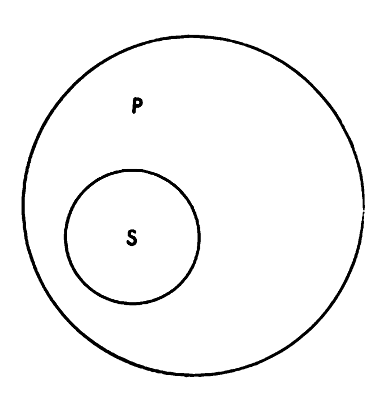


Fig. 11

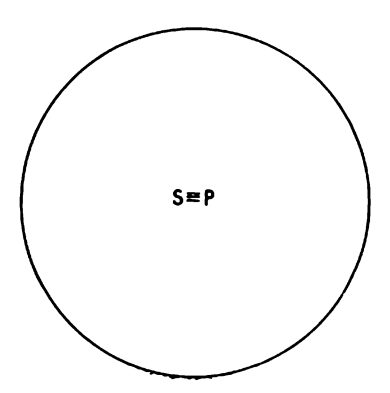


Fig. 12

S fait partie de la classe P, on peut en général, affirmer seulement que « certains P sont S ». Autrement dit, « certains couples d'angles égaux sont les couples d'angles verticaux l'un par rapport à l'autre ». Quelles sont donc les conditions pour lesquelles les deux propositions « tous les S sont P » et « tous les P sont S » soient justes? Il est évident que cela ne peut avoir lieu que si, et seulement si, les classes S et P sont identiques ($S \equiv P$). Dans ce cas le cercle de S coïncide avec celui de P (fig. 12). Ainsi, pour le théorème « Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux » la réciproque « Tous les triangles ayant les angles égaux à la base sont isocèles » est également juste. La cause en est que la classe des triangles isocèles et celle des triangles dont les angles à la base sont égaux coïncident. La classe des triangles rectangles et celle des triangles dont le carré construit sur un côté quelconque est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés se confondent aussi. Notre élève de troisième a tout simplement eu de la chance de résoudre le problème considéré malgré qu'il ait utilisé le théorème direct au lieu de sa réciproque.

Mais cela n'était possible que grâce au fait que la classe des quadrilatères dans lesquels on peut inscrire un cercle coïncide avec celle dont les sommes des côtés opposés sont égales. (Dans ce cas il s'est avéré que « tous les P sont M » et « tous les M sont P », voir le schéma à la page 131.)

Le bref exposé ci-dessus montre qu'une réciproque, pour peu qu'elle soit juste, ne représente aucunement une conséquence immédiate du théorème direct mais *nécessite toujours une démonstration à part.*

5. Il peut parfois s'avérer que les théorèmes direct et réciproque ne cadrent pas avec le schéma « Tous les S sont P » ou « Tous les P sont S ». Il en est de même pour les cas où ces théorèmes s'expriment sous forme d'un « jugement dit conventionnel » dont la représentation schématique est : « Si A est B, alors C est D ». Par exemple : « Si un quadrilatère est circonscrit au cercle, les sommes de ses

côtés opposés sont égales ». La première partie de la proposition, « Si A est B » s'appelle *hypothèse* du théorème, la seconde — « alors C est D », sa *conclusion*. La réciproque s'obtient donc du théorème direct de sorte que la conclusion devient l'hypothèse et vice versa. La représentation d'un théorème sous forme d'un jugement conventionnel est souvent plus habituelle que sous la forme « Tous les S sont P » qu'on appelle « catégorique ». Cependant il est aisé de voir que cette différence est sans importance et tout jugement conventionnel se transforme facilement en celui catégorique et vice versa. Ainsi, par exemple, le théorème donné sous une forme conventionnelle: « Si deux droites parallèles sont coupées par une transversale, les angles alternes-internes qu'elles forment avec celle-ci sont égaux », peut être formulé sous une forme catégorique de façon suivante: « Deux droites parallèles coupées par une transversale forment avec elle les angles alternes-internes égaux ». Donc, nos raisonnements restent en vigueur pour des théorèmes formulés sous leur forme conventionnelle. La justesse simultanée des théorèmes direct et réciproque est assurée dans ce cas aussi par la coïncidence des classes des notions correspondantes. Ainsi, dans l'exemple que nous venons d'examiner les théorèmes direct et réciproque sont simultanément justes, car la classe des « droites parallèles » est identique à celle des « deux droites qui, coupées par une transversale, forment avec elle les angles alternes-internes égaux ».

6. Passons maintenant à l'examen d'autres erreurs dans les démonstrations géométriques. Les erreurs dans les démonstrations géométriques sont dues souvent à ce qu'on a recours à des cas particuliers sans faire attention à d'autres propriétés d'une figure donnée. Ainsi, l'erreur dans les raisonnements de mon voisin Anatole qui avait cherché à démontrer le théorème sur l'angle extérieur de tout triangle en se bornant à examiner seul un triangle acutangle dont

tous les angles extérieurs sont vraiment obtus et ceux intérieurs aigus, porte le même caractère.

Nous allons donner ci-dessous encore un exemple d'une telle erreur bien que cette fois elle soit bien moins apparente. Rappelons-nous pour commencer l'exemple donné plus haut sur deux triangles inégaux (cf. fig. 4) dont les deux côtés quelconques et l'angle opposé à l'un d'eux sont respectivement égaux. Donnons une « démonstration » qui, contrairement au fait déjà établi de leur inégalité, affirme que de tels triangles sont nécessairement égaux. Cette démonstration présente un intérêt du fait qu'elle ressemble beaucoup à celle du troisième cas d'égalité des triangles.

Ainsi, soient ABC et $A'B'C'$ (fig. 13) deux triangles tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\hat{C} = \hat{C}'$. Appliquons le triangle $A'B'C'$ à celui ABC de sorte que le côté $A'B'$ coïncide avec AB et le point C' prend la position C''. Joignons le point C avec C'' et supposons que le segment CC'' coupe le côté AB quelque part entre les points A et B (fig. 13,*a*). Par hypothèse le triangle ACC'' est isocèle ($AC = AC''$), d'où $\widehat{ACC''} = \widehat{AC''C}$ et vu que $\hat{C} = \hat{C}''$, en retranchant des angles égaux les angles égaux, on obtient $\widehat{BCC''} = \widehat{BC''C}$ et, donc, le triangle CBC'' est également isocèle. C'est pourquoi $BC = BC''$ et les triangles ABC et ABC'' sont égaux comme tous les triangles ayant les 3 côtés respectivement égaux. Par conséquent, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Si le segment CC'' coupe la droite AB en dehors du segment AB, le théorème reste toujours vrai (fig. 13,*b*). En effet, dans ce cas aussi le triangle ACC'' est isocèle et $\widehat{ACC''} = \widehat{AC''C}$. Mais, étant donné que $\hat{C} = \hat{C}''$, en retranchant ces deux angles des deux angles de l'égalité ci-dessus, on obtient de nouveau que $\widehat{BCC''} = \widehat{BC''C}$ et le triangle

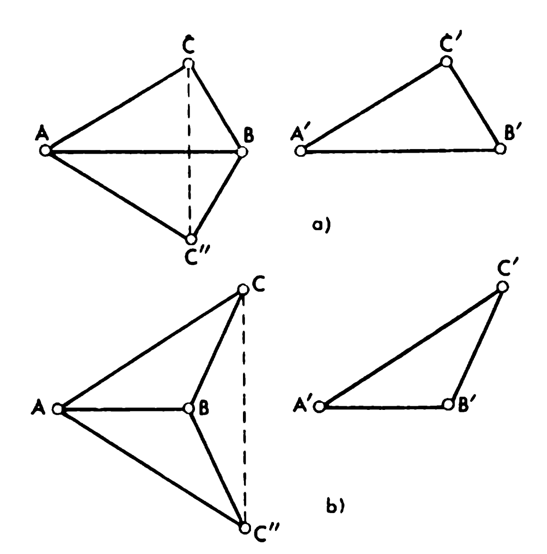


Fig. 13

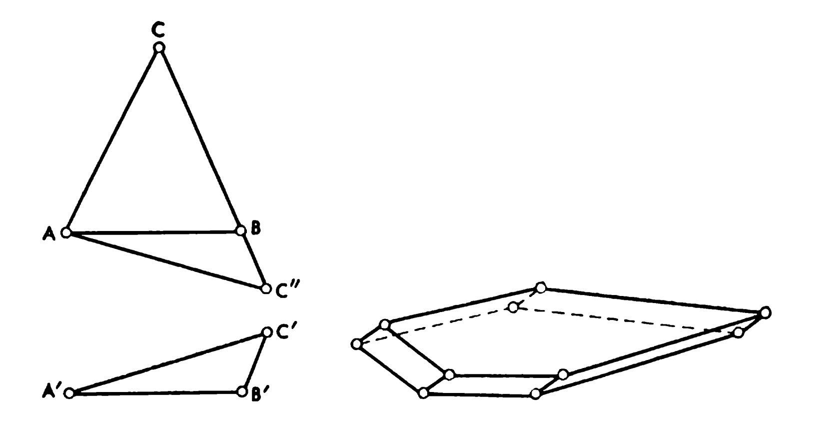


Fig. 14

Fig. 15

BCC'' est isocèle, donc $BC = BC''$. Ainsi on a obtenu une fois de plus le troisième cas d'égalité des triangles, c.-à-d. $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Il paraît que la démonstration est terminée et tous les cas possibles sont épuisés. Toutefois, on a laissé échapper encore un cas où le segment CC'' passe par une extrémité du segment AB. Sur la fig. 14 le segment CC'' passe par le point B. Il est aisé de voir que dans ce cas nos raisonnements ne sont plus valables et les triangles peuvent s'avérer absolument différents, comme il est indiqué sur la fig. 14.

Les théorèmes sur la surface latérale d'un prisme oblique et sur le volume identique d'un prisme droit et de celui oblique, qui figurent dans beaucoup de manuels de géométrie élémentaire, représentent un autre exemple instructif d'une erreur de ce type. Le premier théorème affirme : « La surface latérale d'un prisme est égale au produit du périmètre d'une section perpendiculaire par son arête latérale ». Le deuxième dit : « Chaque prisme a le même volume qu'un prisme droit dont la base est une section perpendiculaire du prisme oblique et la hauteur, son arête latérale ». Toutefois il est aisé de voir que ces deux théorèmes ne sont démontrés que pour un cas particulier où les arêtes des prismes sont suffisamment longues pour permettre d'y mener une section perpendiculaire. Mais il existe toute une classe des prismes pour lesquels il est tout simplement impossible de tracer une section perpendiculaire coupant toutes les arêtes latérales. Ce sont des prismes très obliques d'une hauteur insignifiante (fig. 15). Dans un tel prisme une section perpendiculaire à l'une des arêtes latérales ne coupe pas toutes les autres arêtes et tous les raisonnements servant à la démonstration de ces propositions ne sont plus valables. Dans le cas considéré l'erreur est due à l'ancienne habitude de s'imaginer un prisme comme une brique d'une hauteur considérable, tandis que les prismes de faible hauteur sont très peu répandus dans les manuels. Cet exemple illustre une fois de plus à quel point il faut être prudent en traçant

les dessins dont on se sert dans la démonstration. A chaque étape de la démonstration nécessitant une illustration graphique quelconque une question se pose naturellement de savoir : « Peut-on le faire toujours ou non ? ». Cette question posée lors de la démonstration des théorèmes ci-dessus aurait permis de trouver des prismes dont une section perpendiculaire est irréalisable.

7. L'essence de l'erreur des deux derniers exemples consiste à *démontrer non pas la proposition à démontrer mais seulement un certain cas particulier* lié à des particularités d'une figure géométrique donnée. On peut donner encore un exemple d'une erreur de ce type, bien qu'elle soit plus profonde et moins évidente.

Il s'agit de démontrer l'existence des segments incommensurables, dont l'exposé figure habituellement dans le cours de géométrie élémentaire. Rappelons brièvement les raisonnements appropriés. On donne d'abord la définition de commune mesure de deux segments et on établit qu'elle peut être portée bout à bout un nombre entier de fois sur la somme et la différence des segments donnés. On introduit ensuite la méthode de détermination de la commune mesure connue dès l'époque d'Euclide ; c'est de porter bout à bout le petit segment sur le grand, le premier segment restant sur le petit segment, le deuxième segment restant sur le premier segment restant et ainsi de suite. Le segment restant qu'on peut porter bout à bout un nombre entier de fois sur celui précédent représente donc la plus grande commune mesure de segments donnés. On définit ensuite que les segments ayant une commune mesure sont dits *commensurables* et ceux qui n'ont pas de commune mesure, *incommensurables*. Mais le fait même d'existence des segments incommensurables doit être démontré théoriquement ne serait-ce que pour un seul couple de tels segments. A titre d'exemple on cite souvent le fait que la diagonale d'un carré est incommensurable avec son côté. La démonstration en est euclidienne : on porte successivement le côté d'un carré sur sa diago-

nale, le segment restant sur son côté, etc. Il s'avère alors que la différence entre la diagonale et le côté d'un carré représente le côté d'un nouveau carré, on porte ce dernier côté sur la nouvelle diagonale, etc., donc un tel processus est à n'en plus finir, d'où il s'ensuit que la plus grande commune mesure de la diagonale d'un carré et de son côté n'existe pas. On en conclut enfin: par conséquent, il est impossible de trouver la commune mesure de la diagonale d'un carré et de son côté, donc, ils sont incommensurables.

En quoi consiste la fausseté d'une telle conclusion? La cause en est que de l'impossibilité de trouver la commune mesure par la méthode d'Euclide il ne s'ensuit aucunement qu'une telle commune mesure n'existe pas. C'est que si l'on ne peut pas trouver un objet par un procédé quelconque, cela ne signifie nullement qu'il n'existe pas, car on peut bien le trouver par d'autres procédés. Ainsi, par exemple, nous n'aurions pu admettre le raisonnement suivant: «Vu qu'aucun microscope ne permet de déceler les électrons, donc ils n'existent pas ». Il est aisé de voir qu'aux raisonnements de ce type on peut objecter comme suit: « Il existe, outre les microscopes, d'autres moyens et méthodes pour prouver l'existence des électrons ».

Ainsi, pour rendre la démonstration d'existence de segments incommensurables tout à fait valable il faut démontre rpréalablement la proposition suivante.

Si le procédé de la recherche de la plus grande commune mesure de deux segments peut être indéfiniment prolongé, ces deux segments sont alors incommensurables.

Voici la démonstration de cette proposition fort importante. Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux segments quelconques (par des traits au-dessus des lettres nous désignons des segments, les lettres sans traits sont des nombres), et $\bar{a} > \bar{b}$. Supposons qu'en reportant successivement $\bar{b}$ sur $\bar{a}$, le premier segment

restant $\overline{r}_1$ sur $\overline{b}$, etc., on obtienne une suite indéfiniment prolongée de segments restants: $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{r}_3$, . . ., chaque reste précédent étant plus grand que le suivant. Ainsi, on a

$$\overline{a} > \overline{b} > \overline{r}_1 > \overline{r}_2 > \overline{r}_3 > \ldots$$

Supposons que les segments $\overline{a}$ et $\overline{b}$ aient p pour commune mesure qui, selon une propriété de la commune mesure, peut être portée bout à bout un nombre entier de fois sur $\overline{a}$, sur $\overline{b}$ et sur chacun des segments restants $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{r}_3$, . . . Supposons maintenant qu'on ait porté cette commune mesure m fois sur $\overline{a}$, n fois sur $\overline{b}$, n_1 fois sur $\overline{r}_1$, n_2 fois sur $\overline{r}_2$, . . ., n_k fois sur $\overline{r}_k$, etc. Les nombres m, n, n_1, n_2, n_3, . . . sont des entiers positifs et, en vertu d'inégalités entre les segments, on a les inégalités correspondantes entre les nombres

$$m > n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$$

Etant donné que nous avons supposé la suite de segments indéfiniment prolongée, la suite mesurante de nombres m, n, n_1, n_2, n_3, . . . doit l'être également, c e q u i e s t i m p o s s i b l e, car une suite décroissante d'entiers positifs ne peut être infinie. Une contradiction ainsi obtenue nous permet de refuser l'existence de la commune mesure de tels segments, c.-à-d. de les reconnaître incommensurables. Un carré nous donne un exemple de l'existence des segments, pour lesquels le procédé décrit ci-dessus peut être indéfiniment répété, donc la diagonale d'un carré est incommensurable avec son côté.

Sans cette proposition supplémentaire que nous venons de formuler la démonstration d'existence de segments incommensurables n'atteint pas le but fixé, car on en démontre bien autre chose et non pas la proposition une fois formulée.

8. Maintenant on passe à d'autres erreurs assez répandues dans les démonstrations géométriques. Celles-ci résident dans le fait qu'on a recours pour la démonstration à des

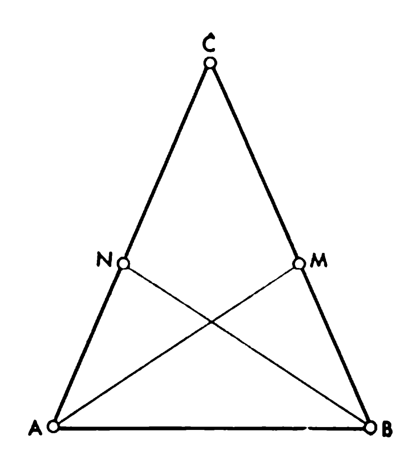


Fig. 16

propositions non démontrées. Il arrive même, pas très souvent d'ailleurs, que pour une démonstration quelconque on fait appel à une proposition à démontrer. Voici, à titre d'exemple, un dialogue bien significatif. L'instituteur demande: « Pourquoi donc ces droites sont-elles perpendiculaires? ». Réponse: « Parce qu'elles forment un angle droit ». — « Pourquoi cet angle est-il droit? » — « Parce que les droites sont perpendiculaires ». Une erreur de ce type s'appelle « cercle dans la démonstration » et sous une forme tellement manifeste ne se rencontre que très rarement. Plus souvent on peut se heurter à ces erreurs sous une forme camouflée. Ainsi, par exemple, il faut résoudre le problème suivant: « Démontrer que si deux bissectrices quelconques d'un triangle sont égales, ce triangle est isocèle ».

Voici la démonstration faite par un écolier: « Supposons que la bissectrice AM du triangle ABC soit égale à la bissectrice BN (fig. 16). Considérons les triangles ABM et ABN. Ils sont égaux, vu que $AM = BN$, le côté AB est

commun et $\widehat{ABN} = \widehat{BAM}$ comme moitiés des angles égaux à la base. Ainsi, $\triangle ABM = \triangle ABN$, et par conséquent $AN = BM$. Considérons maintenant les triangles ACM et BCN qui sont égaux, car $AM = BN$ et, de plus, sont égaux les angles adjacents à ces côtés. Par conséquent, $CN = CM$, d'où $AN + NC = BM + CM$, c.-à-d. $AC = BC$, ce qu'il fallait démontrer ».

L'erreur en est qu'on a recours à l'égalité des angles à la base d'un triangle. Car cette égalité est une conséquence du fait que le triangle considéré est isocèle, c'est précisément la proposition qu'il faut démontrer.

Il arrive qu'on fait également appel à des propositions non démontrées en les considérant comme évidentes bien qu'elles ne figurent pas parmi les axiomes. Examinons les deux exemples suivants. Au cours de l'analyse du problème sur la position mutuelle d'une droite et d'un cercle les trois cas suivants peuvent se présenter : 1) la distance de la droite au centre du cercle est plus grande que le rayon — la droite est en dehors du cercle ; 2) la distance de la droite au centre est égale au rayon — la droite et le cercle ont un point commun et un seul (tangente) ; 3) la distance de la droite au centre est plus petite que le rayon — la droite et le cercle ont deux points communs (sécante).

Notons que les deux premières propositions sont accompagnées de démonstrations correctes, et dans le troisième cas on dit : « La droite passe par un point situé à l'intérieur du cercle, il est donc évident qu'elle coupe le cercle ». Toutefois il est aisé de voir que l'expression « il est donc évident » équivaut à une proposition géométrique fort importante : « Toute droite passant par un point intérieur à un cercle coupe ce cercle en deux points ». A vrai dire ce fait est bien évident, mais comme nous l'avons souligné à maintes reprises la notion même d'évidence est trop imprécise et vague. Il faut donc considérer cette proposition comme un axiome ou bien la démontrer en se basant sur d'autres propositions.

Un autre exemple consiste à démontrer le théorème réciproque sur un quadrilatère circonscrit ; on peut trouver cette démonstration dans certains manuels de géométrie élémentaire. Ainsi, il faut démontrer que *si les sommes des côtés opposés d'un quadrilatère sont égales, alors un cercle peut être inscrit dans ce quadrilatère.*

Voici la démonstration textuelle: « On a $AB + CD = BC + AD$ (fig. 17). Traçons le cercle touchant les côtés AB, BC et CD et démontrons qu'il touchera également le côté AD. Supposons le contraire: qu'il ne touche pas AD. En menant du point A la tangente AD_1, on obtient un quadrilatère circonscrit $ABCD_1$, où, en vertu du théorème direct, $AB + CD_1 = BC + AD_1$. En retranchant membre à membre cette égalité de celle donnée, on obtient : $CD - CD_1 = AD_1 - AD$, ou $DD_1 = AD_1 - AD$, ce qui est impossible (la différence de deux côtés du triangle ADD_1 ne peut être égale à son troisième côté). Par conséquent, le cercle considéré, tout en touchant les côtés AB, BC et CD, touche en même temps le côté AD ».

L'erreur de cette démonstration réside dans le fait que sans savoir rien de précis sur la position du point A on raisonne comme si elle était déjà fixée: il faut démontrer avant tout que le *point de tangence du cercle se trouve entre les points A et B*. Si les points A et D se trouvent disposés comme il est indiqué à la fig. 18, tous les raisonnements ci-dessus sont injustifiés. On peut démontrer que les points de tangence doivent se trouver entre les points A et B et entre C et D mais vu que cela nous amène à des raisonnements assez compliqués il vaut mieux recourir à la démonstration déjà exposée à la page 134.

Ainsi, à la question posée plus haut : quelles conditions doit vérifier une démonstration pour être correcte, c.-à-d. pour pouvoir garantir la justesse d'une proposition à démontrer, on peut répondre comme suit :

a) La démonstration ne doit être basée que sur des propositions justes, c.-à-d. axiomes et théorèmes démontrés.

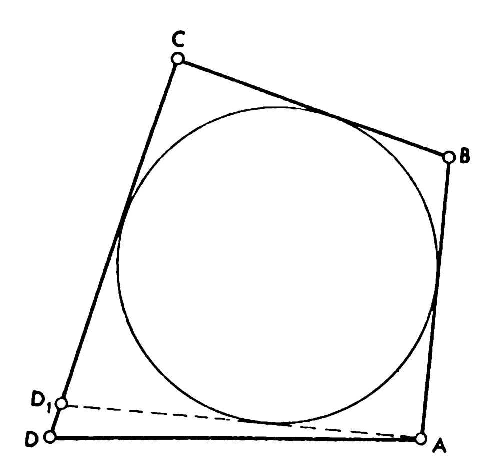


Fig. 17

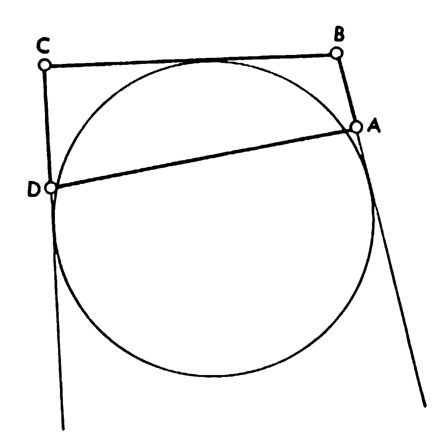


Fig. 18

b) Il faut savoir construire d'une façon correcte toutes les déductions faisant partie d'une démonstration quelconque.

c) Il ne faut jamais perdre de vue le but final de toute démonstration, à savoir: établir la justesse de la proposition formulée sans la remplacer en aucune manière par une autre *).

9. Ces exigences une fois formulées la question se pose naturellement de savoir: comment aboutit-on à des démonstrations correctes?

Nous donnerons ci-dessous quelques conseils utiles. Il convient avant tout de savoir comprendre l' *idée maîtresse* de toute proposition géométrique formulée ou, en d'autres termes, l'objet de la démonstration. Il arrive assez souvent que cette idée est exprimée d'une façon assez imprécise. Par exemple: « Il faut démontrer qu'en joignant successivement les milieux des côtés d'un quadrilatère on obtient un parallélogramme ». Comment peut-on démontrer qu'on obtient effectivement un parallélogramme? Pour répondre à cette question on se rappelle la *définition* d'un parallélogramme qui est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux. Par conséquent, il faut démontrer que les segments ainsi obtenus sont parallèles.

Après avoir compris la proposition à démontrer, on passe à la détermination des hypothèses du théorème qui sont nécessaires pour la démonstration. Dans l'exemple ci-dessus on dit qu'on joint les *milieux* des côtés d'un quadrilatère, ce qui signifie qu'on considère précisément les points qui divisent chaque côté en deux parties égales.

Nous allons maintenant mettre toutes ces données sous une forme symbolique si répandue dans la pratique d'école: « on donne » et « il faut démontrer ». Ainsi, si l'on considère

---

*) Comme c'était le cas dans l'exemple à la page 143.

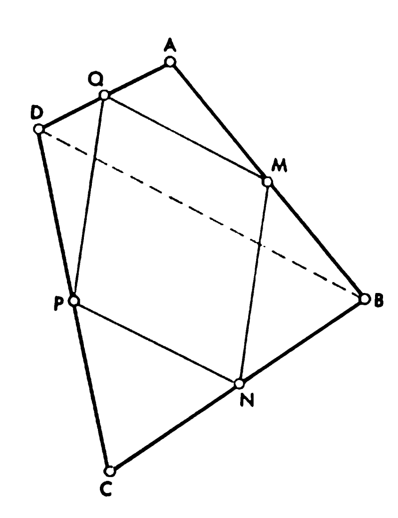


Fig. 19

dans notre exemple le quadrilatère $ABCD$ (fig. 19), M, N, P, Q étant les milieux de ses côtés, ce théorème prend alors la forme:

On donne : pour le quadrilatère $ABCD$ on a $MA = MB$, $NB = NC$, $PC = PD$, $QD = QA$.

Il faut démontrer : $MN \parallel PQ$, $MQ \parallel NP$.

Cette écriture est suivie de la démonstration proprement dite. Pour la démonstration il faut utiliser des axiomes et théorèmes déjà démontrés ainsi que des relations (il faut bien retenir ceci) propres à un théorème donné.

10. Mais une question se pose naturellement de savoir: comment peut-on lier les hypothèses d'un théorème quelconque à des vérités une fois établies et à la proposition à démontrer? Comment d'un nombre important de diverses propositions choisit-on précisément celles en rapport avec le théorème donné?

Il est le plus raisonnable d'en partir de la proposition à démontrer tout en cherchant à répondre à la question

suivante: est-ce qu'il existe une proposition quelconque dont un corollaire peut servir à démontrer notre proposition? Si une telle proposition existe effectivement, tout en étant une conséquence des données du problème et des théorèmes déjà démontrés, notre problème est donc résolu. Sinon, on formule la même question par rapport à cette nouvelle proposition, etc. Une telle manière de raisonner s'appelle *analyse*.

Revenons donc à notre problème où nous devons démontrer le parallélisme de certains segments. Rappelons-nous que ces segments joignent les milieux des côtés d'un quadrilatère. Cela fait, posons la question suivante: existe-t-il parmi les propositions déjà démontrées une telle proposition où il s'agissait de segments parallèles joignant les milieux des côtés d'un polygone? On se souvient aussitôt que l'une de ces propositions est le théorème qui dit que le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle à son troisième côté et égal à sa moitié. Mais dans le quadrilatère considéré il n'y a pas de triangles de ce type. Mais il n'est pas difficile de le construire. Menons, par exemple, la diagonale BD. On obtient alors deux triangles ABD et BCD dont les segments MQ et NP joignent les milieux de deux côtés. Donc, $MQ \parallel BD$ et $NP \parallel BD$; par conséquent, $NP \parallel MQ$. Si l'on mène une deuxième diagonale, on obtient de la même façon $MN \parallel PQ$. Cette deuxième construction n'est d'ailleurs pas nécessaire, car le premier couple de triangles nous donne $MQ = 1/2\, BD$, $NP = 1/2\, BD$; par conséquent, $MQ = NP$, c.-à-d. les côtés opposés MQ et NP du quadrilatère $MNPQ$ sont non seulement parallèles mais, de plus, égaux, d'où il s'ensuit directement que ce quadrilatère est un parallélogramme.

A titre d'un autre exemple considérons le théorème bien connu sur la somme des angles intérieurs d'un triangle. Dans ce cas le théorème ne comprend aucune supposition spéciale et nous nous bornerons à noter ce qu'il faut démontrer: dans le triangle ABC (fig. 20) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

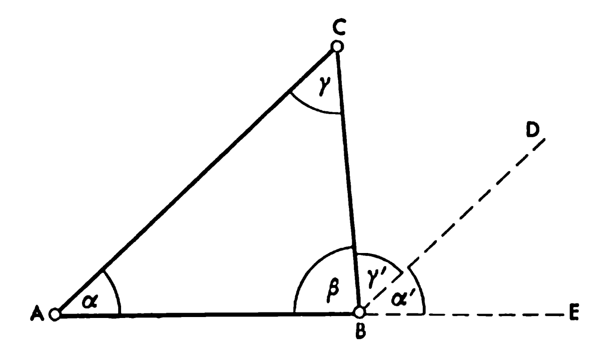


Fig. 20

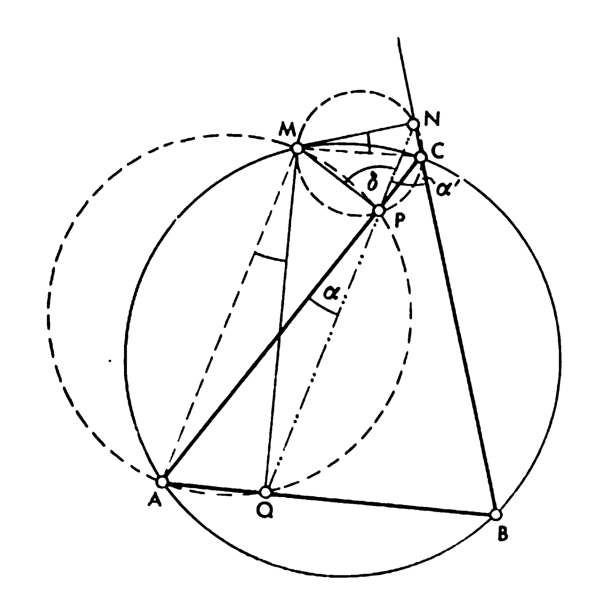


Fig. 21

De cette proposition à démontrer il s'ensuit qu'il faut additionner les trois angles intérieurs du triangle donné. Il est plus rationnel de le faire sur la figure même. Construisons au sommet B de l'angle β un angle $\gamma' = \gamma$. Le côté BD de l'angle γ' est alors parallèle à AC en vertu de l'égalité des angles alternes-internes de la sécante BD. En prolongeant le côté AB au delà du point B on obtient l'angle CBE qu'on désigne par $\alpha' \cdot \alpha' = \alpha$ comme angles correspondants pour les mêmes droites parallèles et la sécante AB. Donc, on a $\alpha' + \beta + \gamma' = 180°$, car la somme de ces angles vaut l'angle plat. D'où, vu que $\alpha' = \alpha$, $\gamma' = \gamma$ on obtient la relation cherchée

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Dans les deux exemples ci-dessus on établit assez rapidement des liens nécessaires. Mais il arrive qu'on peut établir ces liens par toute une série de propositions auxiliaires, ce qui rend l'analyse plus longue et plus compliquée.

11. Donnons un exemple d'une analyse plus compliquée. Il faut démontrer le théorème suivant : *si l'on circonscrit au triangle le cercle et de son point quelconque on abaisse les perpendiculaires sur les côtés du triangle, leurs pieds se trouvent disposés sur une même droite* (*droite de Simpson*).

Procédons à l'analyse. Soient le triangle ABC (fig. 21), M le point quelconque du cercle circonscrit et N, P, Q les projections de ce point sur les côtés BC, CA, AB respectivement du triangle donné. Il faut démontrer que N, P, Q appartiennent à une même droite. En inscrivant la proposition à démontrer il faut prendre en considération que le fait d'appartenance des points N, P, Q à une même droite équivaut à ce que l'angle NPQ est plat. Donc, on peut écrire :

On donne: $MN \perp BC$, $MP \perp CA$, $MQ \perp AB$; le point M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

Il faut démontrer: $\widehat{NPQ} = 180°$. En examinant l'angle

NPQ, on remarque aussitôt qu'il se compose de $\widehat{MPN} = \delta$, $\widehat{MPA} = 90^\circ$ et de $\widehat{APQ} = \alpha$. Si l'on réussissait à démontrer que l'angle $NPQ = \delta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$, le théorème aurait été demontré. Pour cela il nous suffit de démontrer que $\alpha + \delta = 90^\circ$. Considérons l'angle $CPN = \alpha'$. Vu que $\widehat{MPC} = 90^\circ$, on obtient $\alpha' + \delta = 90^\circ$. Si l'on réussissait maintenant à démontrer que $\alpha' = \alpha$, le théorème aurait été démontré. Pour établir cette égalité examinons d'autres angles en recourant pour cela aux hypothèses du théorème. Les angles droits APM et AQM interceptent le segment AM, donc, un cercle ayant AM pour diamètre passe par les points P et Q. En vertu des propriétés des angles inscrits, on a $\widehat{AMQ} = \widehat{APQ} = \alpha$. D'une manière analogue, si l'on construit un cercle ayant MC pour diamètre, on comprend aisément qu'il passe par les points P et N et en vertu des propriétés des angles inscrits $\widehat{CMN} = \widehat{CPN} = \alpha'$. Essayons maintenant de démontrer que $\widehat{AMQ} = \widehat{CMN}$. Remarquons à cet effet que le quadrilatère $ABCM$ est inscrit, donc la somme de ses angles opposés vaut 180°:

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{AMC} + \widehat{B} \quad 180^\circ, \\ \text{ou} \\ &\widehat{AMQ} + \widehat{QMC} + \widehat{B} = 180^\circ. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

D'autre part, les angles aux points Q et N du quadrilatère $BQMN$ sont droits, ainsi la somme de ses deux autres angles vaut 180°:

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{QMN} + \widehat{B} = 180^\circ, \\ \text{ou} \\ &\widehat{QMC} + \widehat{CMN} + \widehat{B} = 180^\circ. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En comparant les égalités (1) et (2), on obtient:

$$\widehat{QMC} + \widehat{CMN} + \widehat{B} = \widehat{AMQ} + \widehat{QMC} + \widehat{B},$$

d'où

$$\widehat{CMN} = \widehat{AMQ},$$

c.-à-d. $\alpha' = \alpha$.

D'où, comme on l'a vu plus haut, il s'ensuit que $\alpha + \delta = 90°$, $\alpha + \delta + 90° = 180°$ et, enfin, $\widehat{NPQ} = 180°$.

S'il nous fallait faire un exposé successif de ces raisonnements, on serait obligé de raisonner en sens inverse: de démontrer d'abord que $\widehat{AMQ} = \widehat{CMN}$, d'établir ensuite les égalités

$$\widehat{AMQ} = \widehat{MQN} \text{ et } \widehat{CMN} = \widehat{CPN}.$$

De l'égalité $\widehat{CPA} = \widehat{CPN} + \widehat{MPN} + 90° = 180°$ on aurait obtenu également que $\widehat{NPQ} = \widehat{MPN} + 90° + \widehat{APQ} = 180°$, c.-à-d. que les points N, P et Q appartiennent à une même droite.

Cette méthode de raisonnement inverse à l'analyse et utilisée largement dans des manuels scolaires pour la démonstration des théorèmes s'appelle *synthèse*. Il est plus aisé d'exposer les démonstrations géométriques par voie synthétique mais de toute façon seule l'analyse permet de t r a c e r la démonstration proprement dite.

Donc, l'analyse et la synthèse sont deux stades inséparables d'un même processus, de la construction d'une démonstration géométrique quelconque. L'analyse est une méthode de recherche des voies de la démonstration et la synthèse est une méthode d'exposé des démonstrations géométriques.

Certes, il n'est pas toujours facile de choisir une bonne voie qui mène directement à la démonstration d'un théorème donné. Il arrive souvent de tomber sur des voies détournées, on les refuse alors pour rechercher d'autres plus directes.

En voici un exemple. On a une proposition à démontrer: « Si deux médianes quelconques d'un triangle sont égales, le triangle est isocèle ». On a le triangle ABC dont les médianes AM et BN sont égales. A première vue, le plus raisonnable c'est d'examiner les triangles ABM et ABN pour démontrer leur égalité. Toutefois, il est aisé de voir que pour une telle démonstration il n'y a pas de données suffisantes: on sait seulement que $AM = BN$ et que AB est le côté commun de ces deux triangles. On ne sait pas si sont égaux leurs angles ou troisièmes côtés. On est donc obligé à refuser cette voie. On s'assure de la même façon qu'il n'y a aucune raison d'examiner les triangles ACM et BCN, car on ne peut pas démontrer leur égalité vu l'insuffisance des données. Recherchons donc d'autres voies. Désignons par P le point d'intersection des médianes et examinons les triangles ANP et BMP. Vu l'égalité des médianes et étant donné que le point P se trouve sur le tiers de chaque médiane, on obtient $PN = PM$, $PA = PB$ et $\widehat{APN} = \widehat{BPM}$ comme angles verticaux. Par conséquent, $\triangle ANP = \triangle BMP$, d'où $AN = BM$. Mais vu que ces segments font la moitié des côtés correspondants, $AC = BC$, ce qu'il fallait démontrer.

Seule une longue expérience de résolution de différents problèmes sur la démonstration géométrique contribue à acquérir l'habitude d'analyser.

12. Pour conclure faisons remarquer qu'il existe deux procédés de démonstration — direct et indirect.

La *démonstration directe* consiste à prouver la justesse de la proposition à démontrer en établissant ses liens directs avec des propositions déjà démontrées.

La *démonstration indirecte* consiste en ce qu'en mettant en doute la justesse de la proposition à démontrer ou en la considérant comme fausse on aboutit à une contradiction avec les hypothèses ou bien avec des propositions déjà démontrées. C'est pour cette raison que la démonstration indirecte est également appelée *démonstration par l'absurde* ou *par réduction à l'absurde*.

Dans l'exposé ci-dessus on utilisait principalement une démonstration directe. Donnons maintenant certains exemples de démonstrations par l'absurde.

Nous commençons par la démonstration du troisième cas d'égalité des triangles. Dans des manuels scolaires on dit qu'étant donné qu'on ne connaît rien sur l'égalité des angles il n'est pas aisé de démontrer ce théorème par la méthode de superposition. Néanmoins, si l'on utilise la démonstration par l'absurde, on peut bien démontrer ce théorème par la superposition.

Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ (fig. 22), où $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, $AB = A'B'$. Transportons le triangle $A'B'C'$ sur le triangle ABC de sorte que le côté $A'B'$ coïncide avec AB. Etant donné que nous ne savons rien sur l'égalité des angles, nous ne pouvons donc pas affirmer que le point C' coïncide avec C. Supposons qu'il prenne la position C''. Joignons les points C et C''. Le triangle ACC'' est isocèle (par hypothèse $AC'' = AC$), le triangle BCC'' l'est également ($BC'' = BC$ par hypothèse). La hauteur AM du triangle isocèle ACC'' passe par le point M, milieu du côté CC'' (car dans un triangle isocèle la hauteur et la médiane se confondent). La hauteur BM du triangle isocèle BCC'' passe elle aussi par le milieu M du côté CC''. Ainsi, on a obtenu que du point M sont élevées deux perpendiculaires AM et BM à une même droite CC''. Ces perpendiculaires ne peuvent se confondre, sinon les points A, B et M appartiendraient à une même droite, ce qui est impossible

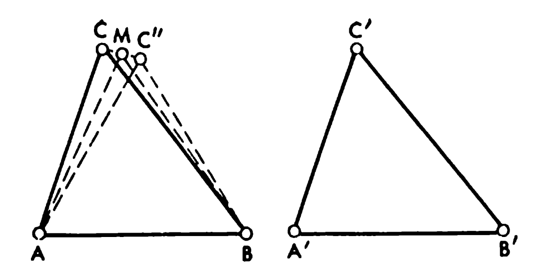


Fig. 22

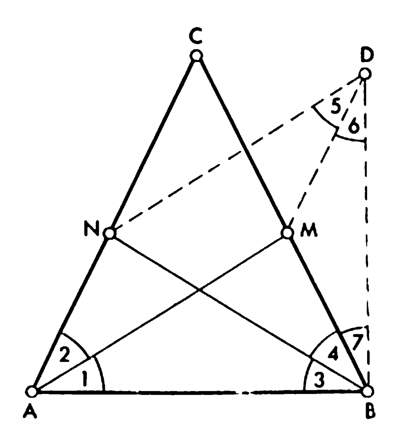


Fig. 23

vu que les points C et C'' (et par conséquent tout les egment) sont disposés d'un même côté de la droite AB.

Ainsi, on est amené à conclure qu'en admettant la non-coïncidence des points C et C' on peut élever d'un même point M deux perpendiculaires différentes à la même droite CC''. Mais cela est en contradiction avec les propriétés déjà établies d'une perpendiculaire. Par conséquent, si l'on superpose l'un de ces triangles à l'autre, le point C' doit coïncider avec le point C, et on obtient que $\triangle ABC =$ $= \triangle A'B'C'$.

Considérons, à titre d'un autre exemple, la proposition déjà formulée: si deux bissectrices d'un triangle sont égales, ce triangle est isocèle.

Soient le triangle ABC et ses deux bissectrices AM et BN (fig. 23).

Mettons ce théorème sous une forme usuelle.

On donne: dans le triangle ABC on a $\widehat{CAM} = \widehat{BAM}$, $\widehat{CBN} = \widehat{ABN}$, $AM = BN$.

Il faut démontrer: $AC = BC$.

Nous démontrerons ce théorème par la réduction à l'absurde. Supposons que le triangle donné ne soit pas isocèle et, pour fixer les idées, posons $AC > BC$. S'il en est ainsi, on obtient que $\widehat{ABC} > \widehat{CAB}$. Après avoir numéroté les angles, comme cela est indiqué sur la fig. 23, on obtient que $\widehat{3} > \widehat{1}$. Comparons maintenant les triangles ABM et ABN: AB est leur côté commun, $AM = BN$ par hypothèse et les angles compris entre les côtés respectivement égaux ne sont pas égaux. Par conséquent, le côté opposé à un angle plus grand est plus grand que l'autre, c.-à-d. $AN > BM$. Menons par le point N le segment ND égal et parallèle à AM. Le quadrilatère $AMDN$ est alors un parallélogramme, d'où $MD = AN$ et $\hat{5} = \hat{2}$. En joignant B et D, on obtient le triangle isocèle BDN, car $ND = AM = BN$.

D'autre part, dans le triangle BDM le côté $MD = AN$, mais $AN > BM$, par conséquent, $MD > BM$, d'où $\hat{7} > \hat{6}$. Mais $\hat{4} > \hat{5}$, car $\hat{5} = \hat{2} = \hat{1}$ et $\hat{4} = \hat{3}$, mais $\hat{3} > \hat{1}$. En additionnant membre à membre les inégalités $\hat{7} > \hat{6}$ et $\hat{4} > \hat{5}$, on obtient:

$\hat{4} + \hat{7} > \hat{5} + \hat{6}$, c.-à-d. $\widehat{BDN} > \widehat{DBN}$. D'où il s'ensuit que les angles à la base du triangle i s o c è l e BDN ne sont pas égaux. La contradiction ainsi obtenue nous oblige à refuser l'hypothèse $AC > BC$. En raisonnant d'une manière analogue on pourrait bien refuter l'hypothèse $BC >$ $> AC$. Donc, $AC = BC$.

Les exemples ci-dessus permettent d'élucider le caractère de la démonstration par l'absurde que l'on utilise si la démonstration directe s'avère trop compliquée ou même impossible.

Dans ce cas on choisit une hypothèse contraire à celle à démontrer et par voie analytique on cherche à la ramener à une proposition qui est manifestement en contradiction avec quelque proposition déjà démontrée. A de telles propositions contradictoires nous avons précisément abouti dans les deux derniers exemples: dans le premier cas nous sommes venus à la conclusion que par un même point on peut mener à une même droite deux perpendiculaires différentes et dans le deuxième cas, que les angles à la base d'un triangle isocèle ne sont pas égaux.

IV. QUELLES SONT LES PROPOSITIONS GÉOMÉTRIQUES QU'ON PEUT ADMETTRE SANS DÉMONSTRATION?

1. Passons maintenant à la dernière question posée dans l'introduction: quelles sont les propositions géométriques qu'on peut admettre sans démonstration?

A première vue cette question est très simple. Nul doute qu'on peut admettre sans démonstration les axiomes à titre desquels il faut prendre les propositions dont la justesse est déjà maintes fois vérifiée et hors de doute. Toutefois, en choisissant pratiquement de tels axiomes, on se heurte aussitôt à d'énormes difficultés.

Aujourd'hui on connaît beaucoup de propositions géométriques à tel point vérifiées qu'il est peu probable que quelqu'un ait des doutes sur leur justesse. Mais cela ne signifie point qu'il faut les considérer comme axiomes. Ainsi, par exemple, nous sommes absolument certains que: par deux points différents il passe exactement une droite; par un point donné on ne peut mener à une même droite qu'une perpendiculaire et une seule; la somme de deux côtés quelconques d'un triangle est plus grande que son troisième côté; deux segments quelconques égaux à un même troisième sont égaux entre eux; la distance entre deux droites parallèles quelconques est partout la même, etc. Il va sans dire que le nombre de telles propositions est bien plus considérable. Et si l'on prenait pour axiomes toutes ces propositions? En effet, l'exposé de géométrie se simplifierait énormément, bien de démonstrations s'avéreraient inutiles, etc.

Mais l'évolution de géométrie a pris une autre voie. Les géomètres ont commencé à chercher à réduire au minimum le nombre d'axiomes pour établir déductivement

toutes les autres propositions géométriques en se basant sur un nombre restreint de vérités fondamentales.

Pourquoi donc choisir une telle voie d'édification du système des connaissances géométriques aussi difficile que compliquée? Il y a en a toute une série de motifs. En premier lieu, pour un nombre restreint d'axiomes l'importance de tout axiome pris séparément devient bien plus considérable: il ne faut pas oublier que ces axiomes doivent servir de base pour l'édifice à construire. Donc, plus restreint est le nombre d'axiomes et plus générales, profondes et importantes sont les propriétés de l'espace décrites par chaque axiome.

Une autre cause importante qui nous oblige à réduire le nombre d'axiomes réside dans le fait qu'avec un nombre restreint d'axiomes il est bien aisé de contrôler leur justesse et d'observer les conditions auxquelles ils doivent satisfaire dans leur ensemble (nous en parlerons plus loin).

2. Donc, nous voici devant le problème de choisir un nombre restreint au maximum de propositions géométriques les plus générales et importantes qu'on va prendre pour axiomes. Quel est donc le critère d'un tel choix? Il est avant tout impossible de les considérer isolément, l'un après l'autre, sans faire attention à tout l'ensemble d'axiomes. Il convient ainsi d'admettre non pas un axiome isolé mais *tout un système d'axiomes*, car seul un tel système permet de refléter d'une façon correcte les propriétés et les rapports réciproques réels des formes de l'espace du monde matériel.

Il est donc naturel que seules les vérités maintes fois vérifiées et reflétant les régularités fondamentales et les plus générales des formes de l'espace peuvent constituer ce système.

En construisant cette base axiomatique il faut veiller à ne pas y introduire les propositions contradictoires, car ces propositions ne peuvent être simultanément justes, comme, par exemple, les deux axiomes suivants: « Par

un point quelconque non situé sur une droite donnée il passe au plus une parallèle à celle-ci » et « Par un point quelconque non situé sur une droite donnée il ne passe aucune parallèle à celle-ci ».

Il ne suffit pas de nous borner à la non-contradiction des axiomes, mais le système d'axiomes ne doit pas donner lieu à des conséquences incompatibles entre elles. C'est une condition fondamentale à laquelle doit satisfaire la base axiomatique et qu'on appelle *condition de non-contradiction*.

Tout en observant le critère de non-contradiction il faut en même temps veiller à ne pas mettre dans la base axiomatique des énonces démontrables à l'aide des autres axiomes, c.-à-d. à ne pas la rendre surabondante. Cela est d'ailleurs bien clair si l'on tient compte du fait que notre tâche est de réduire au minimum le nombre d'axiomes contenus dans la base, c.-à-d. de la rendre minimale. C'est que si une proposition donnée peut être démontrée à l'aide des autres axiomes, elle n'est plus un axiome, mais un théorème, et il n'y a aucun besoin de la mettre dans le système d'axiomes. L'exigence qui consiste en ce qu'un axiome soit indémontrable à l'aide des autres axiomes s'appelle *condition d'indépendance*.

Tout en cherchant à rendre notre système d'axiomes le plus restreint possible il ne faut pas pousser cette tendance à l'extrême et en éliminer des propositions absolument nécessaires pour les démonstrations ultérieures.

Voici donc la troisième condition que doit vérifier toute base axiomatique — *condition d'intégrité*. En d'autres termes, on peut la formuler comme suit : si la base n'est pas intègre, on peut toujours y ajouter un nouvel énoncé indépendant (dont les notions fondamentales coïncident avec celles des autres axiomes) sans qu'il contredise tous les autres axiomes. Si la base axiomatique est intègre, tout nouvel énoncé dont les notions fondamentales sont identiques à celles des autres axiomes sera une conséquence

de ces axiomes, ou bien en contradiction avec ceux-ci.

3. Pour rendre plus concrètes les trois conditions auxquelles doit satisfaire toute base axiomatique, nous donnerons ci-dessous un exemple fort simple qui, bien qu'il ne soit pas une image tout à fait identique des relations géométriques, représente tout de même une bonne analogie avec celles-ci.

Considérons un système d'équations du premier degré à trois inconnues. Nous considérerons chacune des inconnues de ce système comme une certaine « notion » à déterminer et chaque équation comme une sorte d'« axiome » qui nous permettra d'établir certaines relations entre ces « notions ».

Soit le système :

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3, \\ x + y + 4z &= 6. \end{aligned}$$

Peut-on déterminer dans ce système les inconnues x, y et z? Bien sûr que non, car le nombre d'équations est plus petit que celui d'inconnues. Le système ne satisfait pas à la *condition d'intégrité.*

« Corrigeons » quelque peu ce système en ajoutant encore une équation :

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3, \\ x + y + 4z &= 6, \\ 3x + 3y + 12z &= 18. \end{aligned}$$

En examinant le système ainsi obtenu on voit que cela ne sert à rien, car la troisième équation est une simple conséquence de la deuxième, donc elle ne donne rien de nouveau. Dans ce système est violée la *condition d'indépendance.*

Modifions la troisième équation et considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3, \\ x + y + 4z &= 6, \\ 3x + 3y + 12z &= 15. \end{aligned}$$

On comprend aisément que ce système lui aussi ne permet pas de déterminer les inconnues.

En effet, en divisant les deux membres de la dernière équation par 3, on obtient l'équation:

$$x + y + 4z = 5.$$

Quant à la deuxième équation elle nous donne:

$$x + y + 4z = 6.$$

Laquelle de ces deux équations est-elle juste? Il est clair que nous avons un *système contradictoire*, d'où on ne peut pas non plus définir les inconnues.

Si l'on considère, enfin, le système

$$2x - y - 2z = 3,$$
$$x + y + 4z = 6,$$
$$2x + y + 5z = 8,$$

on comprend aisément qu'il a une seule solution ($x = 5$, $y = 13$, $z = -3$), donc ce système est indépendant, intègre et non contradictoire. Si l'on ajoute à ce système une quatrième équation liant x, y et z, elle sera soit une conséquence des trois équations données soit en contradiction avec celles-ci.

4. On peut en conclure que le choix des axiomes sur lesquels doit reposer la géométrie est loin d'être arbitraire et est soumis à des restrictions assez rigoureuses. L'édification axiomatique de la géométrie a été commencée à la fin du siècle passé et bien qu'on ait des progrès considérables, ce travail n'est pas terminé jusqu'à présent. La cause en est qu'en examinant d'une façon systématique la base axiomatique actuelle, on y découvre parfois les axiomes « dépendants », « de trop », en d'autres termes, les axiomes qui sont les conséquences des axiomes plus généraux et plus simples, donc, il faut remplacer les propositions compliquées comprenant un grand nombre d'hypothèses par des axiomes plus simples, etc.

Toutes ces recherches sont d'un grand intérêt pour la science, car leur but est d'élucider les propriétés les plus générales, profondes et importantes des formes de l'espace et qui déterminent tout le contenu de la géométrie.

Pour se faire une idée de la base axiomatique de géométrie actuelle adressons-nous d'abord à un cours de géométrie élémentaire pour voir quels sont ses axiomes de base et quels axiomes lui manque. Nous nous bornerons à la géométrie plane.

L'exposé de tout cours de géométrie élémentaire commence par donner certaines notions géométriques fondamentales: corps, surface, ligne, point. De toutes les lignes on choisit ensuite une droite, de toutes les surfaces, un plan. Les premiers axiomes de ce cours établissent les relations entre un point, une droite et un plan. Ces axiomes se rapportent au premier groupe de la base axiomatique intègre, *axiomes de l'incidence.*

Les axiomes de ce groupe établissent les relations entre les images géométriques fondamentales: combien de points faut-il pour déterminer une droite et un plan, sous quelles conditions une droite appartient-elle à un plan, etc.

Tout cours d'école de géométrie ne fait mention que de deux axiomes de ce groupe:

1) *Par deux points différents il passe une droite et une seule.*

2) *Si deux points quelconques d'une droite appartiennent à un plan, elle appartient toute entière à ce plan.*

En même temps, on a constamment recours, sciemment ou non, à d'autres axiomes de ce groupe dont les deux suivants sont absolument nécessaires pour l'argumentation de la géométrie plane:

3) *Sur toute droite, il y a au moins deux points différents.* Cet axiome, on le voit bien, a une exigence bien restreinte. Mais à l'aide des axiomes de l'ordination on peut démontrer par la suite l'existence d'une infinité de points sur une droite.

4) *Il existe au moins trois points dans un plan qui ne soient pas tous sur la même droite.* Cet axiome n'a lui aussi qu'une exigence minimale qui permettra par la suite de démontrer l'existence d'une infinité de points sur un plan.

5. Passons maintenant au deuxième groupe d'axiomes dont on ne fait même pas mention dans des cours d'école de géométrie bien qu'on ne puisse point se passer de ces axiomes. Les axiomes du deuxième groupe sont appelés *axiomes de l'ordination.* Ces axiomes définissent les règles relatives à l'ordination des points d'une droite ainsi que des points et des droites d'un plan. Ces axiomes sont d'un large usage bien que sous une forme implicite. Ainsi, par exemple, s'il faut prolonger un segment quelconque, on le fait dans les deux sens en toute assurance que cela soit bien légitime.

Si l'on joint deux points quelconques se trouvant de part et d'autre d'une droite, on est certain que le segment ainsi obtenu coupe cette droite. Nous avons utilisé ce fait, par exemple. pour la démonstration du théorème sur l'égalité des triangles dont les deux côtés et l'angle opposé à l'un de ces côtés sont respectivement égaux (cf. fig. 12). Voici encore un exemple: on est absolument sûr que la bissectrice d'un angle intérieur d'un triangle coupera sans manquer le côté opposé.

Il va sans dire que tous ces faits sont bien évidents mais vu qu'ils traitent certaines propriétés fondamentales des figures géométriques dont on se sert constamment il faut les porter au rang d'axiomes.

Les axiomes qui définissent l'ordination des points d'une droite sont liés aux notions fondamentales « précéder » et « suivre » et peuvent être formulés comme suit :

1) *N'importe quel de deux points se trouvant sur une même droite peut être considéré comme précédent, alors l'autre est le suivant.*

2) *Si A, B, C trois points quelconques d'une même droite et si A précède B qui précède C, alors A précède aussi C.*

Même ces deux axiomes définissent d'une façon précise les propriétés particulières d'une droite qui la distinguent des autres courbes. Soit un cercle (fig. 24) que nous allons parcourir dans le sens des aiguilles d'une montre tout en fixant les points A, B, C. On comprend aisément que le point A précède sur cette circonférence le point B, ce dernier précède le point C qui précède à son tour le point A. Pour une telle disposition des points A, B et C sur une droite on dit que le point B se trouve entre les points A et C (fig. 25).

3) *Entre deux points différents d'une même droite il existe toujours un troisième de celle-ci.*

En appliquant successivement cet axiome à deux points quelconques d'une droite (ils existent en vertu du deuxième axiome de l'incidence) et ensuite à chaque intervalle ainsi obtenu, etc., on en conclut qu'entre chaque couple de points sur une droite il existe une infinité de points de cette même droite.

La partie d'une droite à laquelle appartiennent ses deux points quelconques et tous les points intermédiaires s'appelle *segment.*

4) *Pour chaque point d'une droite il existe aussi bien le point précédent que le suivant.*

Il s'ensuit de cet axiome qu'un segment de droite peut être prolongé dans les deux sens. Il en découle également qu'il n'existe pas sur une droite quelconque de point qui précéderait ou suivrait tous les autres points de celle-ci, en d'autres termes la *droite n'a pas d'extrémités.*

La partie d'une droite renfermant un point donné et tous les points qui le précèdent ou un point donné et tous les points qui le suivent s'appelle *rayon* ou *demi-droite.*

L'ordination des points et des droites dans le plan est déterminée par l'axiome suivant dû à Pasch, mathématicien allemand qui fut le premier à le formuler. Il est donc appelé « axiome de Pasch ».

5) *Si l'on a trois points quelconques non situés sur une même droite, alors une droite du même plan ne passant pas*

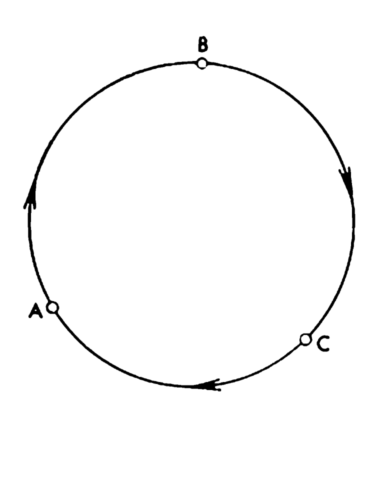


Fig. 24



Fig. 25

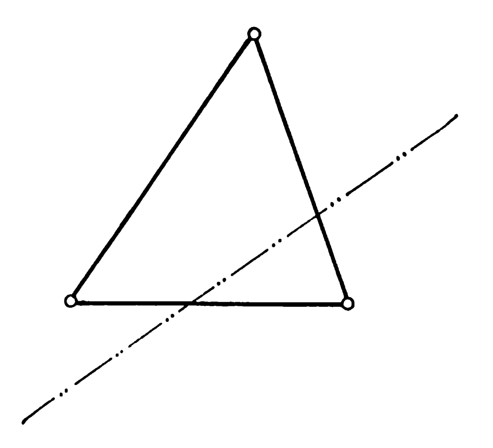


Fig. 26

par ces points et coupant un des segments définis par eux coupe encore un segment et un seul (fig. 26).

Cet axiome permet de démontrer le théorème sur la division d'un plan par une droite en deux demi-plans. A titre d'exemple d'une démonstration rigoureuse ayant recours seulement à des axiomes et propositions déjà démontrées nous donnerons ci-dessous la démonstration de ce théorème que nous allons formuler comme suit:

Toute droite passant dans un plan partage tous les points de ce plan en deux domaines sans points communs de sorte que deux points quelconques d'un même domaine définissent un segment ne coupant pas une droite et deux points des domaines différents, un segment qui coupe cette droite.

Pour abréger l'écriture nous allons utiliser certains symboles qu'il faut bien retenir.

$\subset$ — signe *d'appartenance*: $A \subset a$ « le point *A* appartient à la droite *a* ». $\times$ — signe *d'intersection*: $AB \times a$ « le segment *AB* coupe la droite *a* ». Le trait au-dessus d'une relation quelconque signifie sa *négation*: $\overline{A \subset a}$ « le point *A* n'appartient pas à la droite *a* ». $\therefore$ — signe *de conclusion*: « implique... ». Cela fait, passons à la démonstration du théorème. Remarquons avant tout que *si trois points quelconques se trouvent sur une même droite, la proposition suivante identique à l'axiome de Pasch a lieu*: *la droite coupant l'un des trois segments définis par ces points coupe l'un et l'un seulement des deux autres segments.* Il est aisé de démontrer cette proposition en faisant appel à des axiomes relatifs à l'ordination des points d'une droite.

En effet, si trois points *A*, *B* et *C* appartiennent à une même droite et le point *B* est situé entre *A* et *C*, tous les points des segments *AB* et *BC* appartiennent au segment *AC* et chaque point du segment *AC* (excepté *B*) appartient soit à *AB*, soit à *BC*. Donc, une droite quelconque coupant *AB* ou *BC* coupe obligatoirement *AC* et celle coupant *AC* coupe soit *AB*, soit *BC*.

Soit la droite *l* dans un plan. Il faut démontrer que:

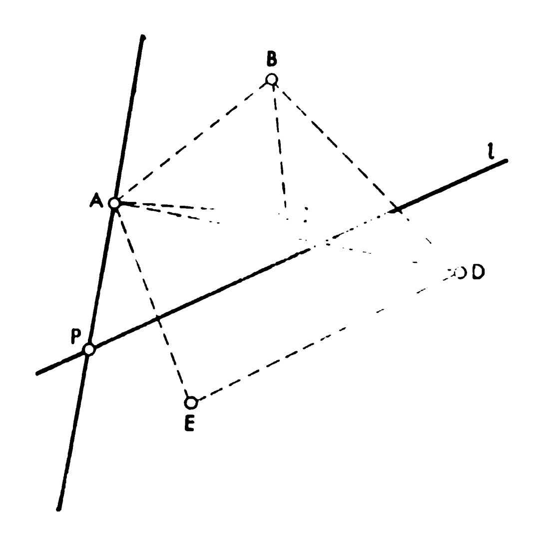


Fig. 27

1) La droite l permet de diviser tous les points du plan en classes sans points communs.

2) Il y a deux classes et seulement deux.

3) Ces classes possèdent des propriétés indiquées dans le théorème.

Pour démontrer ces propositions prenons un point A quelconque n'appartenant pas à la droite l (fig. 27) et convenons que:

a) le point A appartient à la *première* classe (désignée par K_1);

b) tout point n'appartenant pas à l appartient à la *première* classe s'il détermine avec le point A un segment qui ne coupe pas l;

c) tout point n'appartenant pas à l appartient à la *deuxième* classe (désignée par K_2) s'il détermine avec le point A un segment coupant l.

Il est aisé de voir qu'il existe des points appartenant à chacune de ces deux classes. Pour nous en convaincre

prenons sur la droite l le point P et traçons la droite PA. Le rayon ainsi formé ayant pour sommet le point P et renfermant le point A ne se compose que des points de la première classe, car le point d'intersection P est extérieur aux segments déterminés par le point A et d'autres points du rayon. Le rayon opposé ayant le même sommet ne se compose que des points de la deuxième classe, car le point d'intersection P est intérieur à tous les segments définis par le point A et les points de ce rayon. En joignant A à tout point de la droite l on obtient une infinité de droites contenant les points de ces deux classes.

On ne peut avoir que *deux* classes, car pour tout segment joignant A à un point quelconque n'appartenant pas à l, on ne peut formuler que *deux hypothèses*: soit ce segment coupe l, soit il ne la coupe pas, une troisième possibilité n'existe tout simplement pas.

Montrerons, enfin, que les classes K_1 et K_2 satisfont aux hypothèses du théorème. Les cas suivants peuvent se présenter:

1) Les deux points appartiennent à la première classe: $B \subset K_1$, $C \subset K_1$. Comme $B \subset K_1$, alors $\overline{AB \times l}$; comme $C \subset K_1$, alors $AC \times l$. $\therefore$ en vertu de l'axiome de Pasch $BC \times l$.

2) Les deux points appartiennent à la deuxième classe $D \subset K_2$ et $E \subset K_2$. Comme $D \subset K_2$, alors $AD \times l$, comme $E \subset K_2$, alors $AE \times l$. $\therefore$ en vertu de l'axiome de Pasch $\overline{DE \times l}$.

3) Les points appartiennent à des classes différentes: $B \subset K_1$; $D \subset K_2$. Comme $B \subset K_1$, alors $\overline{AB \times l}$, comme $D \subset K_2$, alors $AD \times l$. $\therefore$ en vertu de l'axiome de Pasch $BD \times l$.

Le théorème est démontré.

La partie d'un plan contenant tous les points d'une même classe est appelée *demi-plan*.

Remarquons qu'on peut démontrer ce théorème sans avoir recours au dessin qui aide à suivre les raisonnements

et à retenir les relations obtenues. Cette remarque reste d'ailleurs en vigueur pour toute démonstration suffisamment rigoureuse.

6. Le troisième groupe d'axiomes géométriques est lié à la notion de *congruence*. La congruence des figures dans un plan s'établit dans tout cours de géométrie élémentaire par la superposition.

Voici ce qu'on dit à ce propos dans un manuel de géométrie: « Les figures géométriques peuvent se déplacer dans l'espace sans subir aucune modification. Les deux figures géométriques sont appelées égales si, en faisant déplacer l'une d'elles dans l'espace, on peut la faire coïncider avec l'autre de sorte que coïncideront toutes leurs parties ».

A première vue cette définition d'égalité semble être assez claire mais si on l'examine un peu plus attentivement il est aisé d'y révéler un cercle logique. En effet, pour déterminer l'égalité de figures il faut les faire coïncider et pour cela on *déplace* l'une d'elles dans l'espace de sorte qu'elle reste *invariable*. Mais qu'est-ce que signifie donc « rester invariable »? Cela veut dire qu'une figure reste toujours égale à son image originelle. Donc, on est amené à conclure que la notion d'« égalité » s'exprime par le déplacement d'une « figure invariable » et la notion de « figure invariable » par celle d'« égalité ».

Il est donc plus utile de définir la notion d'égalité de figures géométriques à l'aide d'un groupe d'axiomes relatifs à l'égalité de segments, angles et triangles.

Les axiomes qui établissent les propriétés de l'égalité des segments sont les suivants:

1) *A partir d'un point quelconque sur une droite donnée on ne peut reporter dans un sens déterminé qu'un segment et un seul égal à celui donné.*

2) *Tout segment est égal à lui-même. Si l'un des deux segments quelconques est égal à l'autre, celui-ci est égal à son*

tour au premier. Deux segments quelconques égaux séparément à un troisième sont égaux entre eux.

3) *Si A, B et C appartiennent à une même droite, A', B', C' à une autre droite quelconque et si $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, alors $AC = A'C'$.*

En d'autres termes, deux sommes formées de segments respectivement égaux sont égales.

Les axiomes parfaitement analogues ont lieu pour les angles :

4) *A partir d'un rayon donné on ne peut reporter dans un demi-plan donné qu'un angle et un seul égal à celui donné.*

5) *Tout angle est égal à lui-même. Si l'un des deux angles quelconques est égal à l'autre, celui-ci est égal au premier. Si deux angles quelconques sont égaux à un troisième, ils sont égaux entre eux.*

6) *Si a, b, c sont les rayons ayant un sommet commun, a', b', c' trois autres rayons ayant un sommet commun et si* $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$, $\widehat{bc} = \widehat{b'c'}$, alors $\widehat{ac} = \widehat{a'c'}$.

En d'autres termes, deux sommes formées d'angles respectivement égaux sont égales.

Pour pouvoir argumenter l'égalité des triangles quelconques on introduit encore un axiome du troisième groupe.

7) *Si deux triangles ont deux côtés quelconques et l'angle compris entre eux respectivement égaux, les deux autres angles de ces triangles sont aussi respectivement égaux.* Par exemple, si deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\hat{A} = \hat{A}'$, on a aussi $\hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$.

Ces sept axiomes permettent de démontrer d'abord les cas principaux d'égalités des triangles et ensuite tous les théorèmes sur l'égalité des figures. Dans ce cas le procédé de superposition devient inutile.

Examinons, par exemple, la démonstration du premier cas d'égalité des triangles.

Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ (fig. 28) tels que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\hat{A} = \hat{A}'$. Il faut démontrer

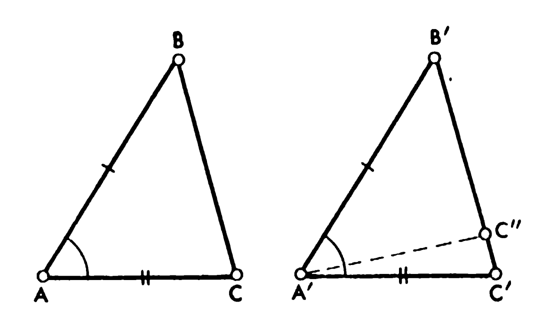


Fig. 28

que tous les autres éléments de ces triangles sont aussi égaux. D'après l'axiome 7 on a immédiatement $\hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$. Il ne reste qu'à démontrer que $BC = B'C'$. Supposons le contraire, c.-à-d. que $BC \neq B'C'$. Reportons alors $B'C'' = BC$ sur le côté $B'C'$ à partir du point B'. Examinons les triangles ABC et $A'B'C''$. On a $AB = A'B'$, $BC = BC''$ et $\hat{B} = \hat{B}'$. En vertu de l'axiome 7 on obtient que $\widehat{B'A'C''} = \hat{A}$. Mais, comme on le sait, deux angles quelconques égaux séparément à un troisième sont égaux entre eux, donc $\widehat{B'A'C''} = \widehat{B'A'C'}$. Nous avons obtenu qu'à partir du rayon $A'B'$ étaient reportés dans un même demi-plan deux angles différents égaux au même angle A, ce qui contredit l'axiome 4. Ainsi, en refusant l'hypothèse $BC \neq B'C'$, on obtient $BC = B'C'$.

Les démonstrations de tous les autres théorèmes concernant l'égalité des figures géométriques sont analogues à celle-ci.

7. Pour l'exposé ultérieur de géométrie élémentaire il se trouve nécessaire d'introduire encore un groupe d'axio-

mes, à savoir *axiomes de la continuité*. Les problèmes sur l'intersection d'une droite avec un cercle et sur l'intersection des cercles entre eux sont intimement liés à des axiomes de ce groupe. Toute construction géométrique effectuée avec un compas et une règle est justement basée sur ces problèmes. Ne serait-ce que ce fait rend les axiomes de la continuité extrêmement importants. Bien plus, toute la théorie de la mesure des grandeurs géométriques repose elle aussi sur ces mêmes axiomes.

Les deux axiomes suivants font partie de ce groupe:

1) Postulat d'Archimède. *Soient deux segments quelconques tels que l'un est plus grand que l'autre; en reportant le petit segment bout à bout un nombre de fois suffisant on peut toujours obtenir une somme dépassant le plus grand segment.* Bref, soient $\overline{a}$ et $\overline{b}$ deux segments quelconques tels que $\overline{a} > \overline{b}$; il existe un entier n pour lequel $n\overline{b} > \overline{a}$.

Le postulat d'Archimède qui sert à déterminer la commune mesure de deux segments quelconques par le procédé du report dont nous avons parlé plus haut fait partie de tout manuel de géométrie. En effet, par ce procédé le petit segment est reporté sur le grand et grâce au postulat d'Archimède nous sommes certains que la somme des petits segments ainsi reportés dépassera tôt ou tard le plus grand segment.

Du postulat d'Archimède il s'ensuit immédiatement que si le segment $\overline{a}$ est plus grand que $\overline{b}$, il existe toujours un entier n tel que $\frac{\overline{a}}{n} < \overline{b}$.

Le deuxième axiome de la continuité appelé *axiome de Cantor* ou *postulat des intervalles emboîtés* s'exprime comme suit:

2) *Une suite d'intervalles emboîtés les uns dans les autres, et tels qu'il s'en puisse toujours indiquer un, et les suivants, qui soient contenus dans un intervalle arbitrairement choisi, converge vers un point déterminé.*

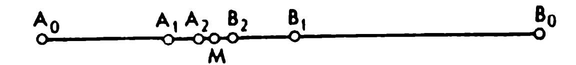


Fig. 29

Pour donner un exemple d'application de l'axiome de Cantor examinons le problème suivant. Désignons par B_1 le milieu du segment A_0B_0 (fig. 29) et par A_1 le milieu du segment A_0B_1. Prenons ensuite le milieu du segment A_1B_1 que nous désignons par B_2 et déterminons le milieu du segment A_1B_2 que nous désignons par A_2. Prenons ensuite le milieu B_3 du segment A_2B_2 et déterminons le milieu du segment A_2B_3 en le désignant par A_3. Prenons, enfin, le milieu du segment A_3B_3, etc. *). Les segments A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, . . . ainsi construits forment une suite d'intervalles emboîtés les uns dans les autres dont chaque suivant se trouve à l'intérieur du précédent et vaut son quart. Ainsi, la longueur du segment A_1B_1 est égale à $\frac{1}{4}A_0B_0$, la longueur $A_2B_2 = \frac{1}{16}A_0B_0$, $A_3B_3 = \frac{1}{64}A_0B_0$, . . ., et en général $A_nB_n = \frac{A_0B_0}{4^n}$.

Du postulat d'Archimède il s'ensuit que cette longueur $\frac{A_0B_0}{4^n}$ pour un n suffisamment grand peut s'avérer plus petit

*) Etant donné que le segment A_3B_3 ne s'inscrit pas dans le cadre du dessin ci-dessus, il ne reste qu'à l'imaginer.

que tout segment donné à l'avance. Ainsi, toutes les conditions de l'axiome étant remplies, il existe un seul point à l'intérieur de cette suite. Il n'est pas tellement difficile de le trouver. En effet, si l'on prend un point M sur $\frac{1}{3}$ du segment A_0B_0, c.-à-d. de sorte que $A_0M = \frac{1}{3} A_0B_0$, ce point sera précisément le point cherché. En effet, si l'on prend pour l'origine de l'axe numérique le point A_0 et pour l'unité le segment A_0B_0, alors aux points A_1, A_2, A_3, . . ., A_n on met en correspondance les valeurs numériques

$$\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}=\frac{5}{16};\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}=\frac{21}{64};\ \ldots;$$

$$\frac{1+4+4^2+\ldots+4^{n-1}}{4^n}.$$

Chacune de ces fractions est inférieure à $\frac{1}{3}$.

En effet, si l'on diminue d'une unité le dénominateur de chacune de ces fractions, la fraction augmentera pour devenir égale précisément à $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1+4+4^2+\ldots+4^{n-1}}{4^n-1}=\frac{1+4+4^2+\ldots+4^{n-1}}{(4-1)(1+4+4^2+\ldots+4^{n-1})}=\frac{1}{3}\ ^{*)}.$$

D'autre part, aux points B_1, B_2, B_3, . . ., B_n correspondent les valeurs numériques

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}=\frac{11}{32};\ \ldots;$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}-\ldots-\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

La valeur numérique correspondant au point B_1 peut égale-

---

*) Pour obtenir cette relation on a utilisé la formule

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

ment être mise sous la forme:

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\ldots-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

En additionnant, on obtient:

$$\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ldots-2^3+2^2-2+1}{2^{2n+1}}.$$

D'où on comprend aisément que chacune des valeurs numériques correspondant aux points $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *dépasse* $\frac{1}{3}$. En augmentant le dénominateur de la fraction d'une unité, nous diminuons par là même la fraction pour obtenir:

$$\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ldots-2^3+2^2-2+1}{2^{2n+1}+1}=$$

$$=\frac{2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ldots-2^3+2^2-2+1}{(2+1)\left(2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ldots-2^3+2^2-2+1\right)}=\frac{1}{3}\ {}^{*)}.$$

Donc, toutes les valeurs numériques correspondant aux points $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ dépassent $\frac{1}{3}$. D'où il s'ensuit que le point M auquel correspond la valeur numérique $\frac{1}{3}$ est intérieur à chacun des segments $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots$ Par conséquent, M est effectivement le seul point déterminé par la suite de ces segments.

Passons maintenant à la démonstration du théorème fondamental sur l'intersection d'une droite avec un cercle.

Rappelons que le cercle est déterminé par son centre et son rayon. Les points d'un plan, dont la distance du centre est inférieure au rayon, sont dits *intérieurs* au cercle,

---

*) Pour obtenir cette égalité on fait appel à la formule

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n}\right).$$

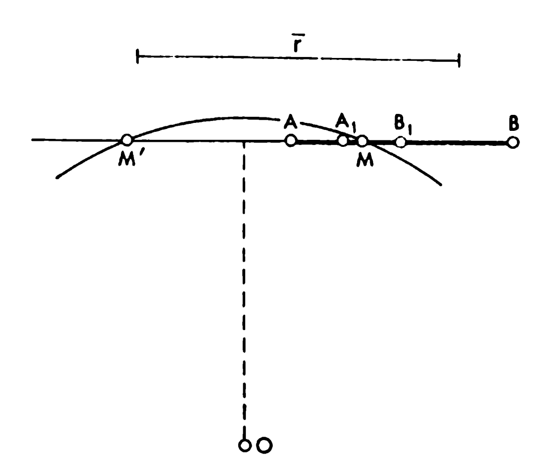


Fig. 30

ceux dont la distance du centre dépasse le rayon sont dits *extérieurs* au cercle. Ainsi, le théorème fondamental s'exprime comme suit :

Tout segment joignant un point intérieur au cercle avec un point extérieur coupe ce cercle une fois et une seule.

Soient un cercle de centre O et de rayon r, A le point intérieur ($OA < r$), B le point extérieur ($OB > r$) (fig. 30). Nous commençons par démontrer que s'il existe sur AB un point M, dont la distance au centre O est égale à r, ce point est unique. En effet, si un tel point M existe réellement, il existe alors un point M' symétrique de M par rapport à la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite AB de sorte que $M'O = MO = r$. D'après la propriété des obliques tracées d'un point quelconque à la droite AB, tous les points intérieurs au segment $M'M$ le sont également au cercle et ceux extérieurs au segment $M'M$ le sont aussi au cercle. Donc, le point A doit se trouver toujours entre les points M' et M, et au segment AB ne peut appartenir qu'un seul point M.

Cela fait, partageons le segment AB en deux et comparons la distance d'un point ainsi obtenu au centre avec le rayon du cercle. Si cette distance s'avérera égale au rayon, le théorème sera démontré. Si elle sera inférieure au rayon, le point en question sera intérieur et nous allons le désigner par A_1. Si cette distance dépassera le rayon, le point considéré sera extérieur et nous le désignerons par B_1.

Prenons ensuite le milieu du segment A_1B (ou AB_1). Cette fois-ci les trois cas suivants peuvent se présenter: ou sa distance au centre est égale au rayon et le théorème sera démontré, ou elle est inférieure au rayon et nous désignerons ce point par A avec un numéro correspondant, ou, enfin, elle dépasse le rayon et nous désignerons ce point par B avec un numéro correspondant. En poursuivant indéfiniment ce processus, on obtient que soit la distance d'un de ces points au centre est égale au rayon et le théorème est donc démontré, soit tous les points désignés par A_1, A_2, ..., A_n, . . . sont intérieurs et ceux désignés par B_1, B_2, ..., B_n, . . . extérieurs. Mais dans ce dernier cas on obtient une suite de segments vérifiant l'axiome de Cantor, car chaque segment suivant se trouve à l'intérieur du précédent et sa longueur vaut la moitié de ce dernier. Il existe donc un seul point se trouvant à l'intérieur de tous ces segments. Etant donné qu'il se trouve disposé entre tous les points intérieurs et entre tous les points extérieurs d'un segment, il ne peut donc être ni intérieur, ni extérieur; par conséquent, le point appartient au cercle considéré.

De ce théorème il s'ensuit, entre autres, que si la distance d'une droite au centre du cercle est inférieure au rayon, cette droite n'a avec le cercle considéré que deux points communs et seulement deux. En effet, soient O le centre et r le rayon d'un cercle quelconque (fig. 31). La distance OP du centre à la droite l est inférieure au rayon; P est donc un point intérieur. Reportons sur la droite l à partir du point P le segment $PQ = r$.

Etant donné que dans le triangle rectangle OPQ l'hypo-

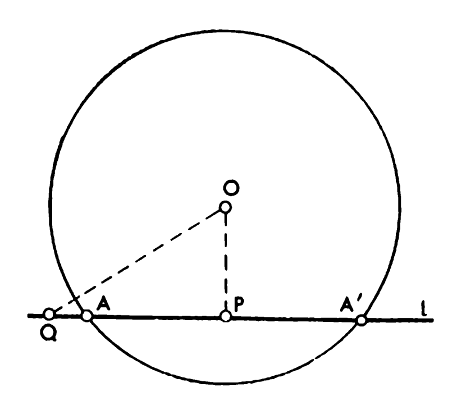


Fig. 31

thénuse OQ est plus grand que le côté $PQ = r$, alors $OQ > r$ et, par conséquent, Q est un point extérieur. En vertu du théorème démontré le segment PQ n'a avec le cercle qu'un seul point commun A. Le deuxième point commun A' est symétrique de A par rapport à la perpendiculaire OP. Etant donné que tous les points intérieurs au segment AA' le sont en même temps au cercle et tous les points extérieurs le sont également par rapport à ce même cercle, donc la droite l n'a pas avec le cercle d'autres points communs.

Les propositions analogues aux axiomes d'Archimède et de Cantor restent en vigueur pour des arcs de cercle, c.-à-d.

1) *Si l'on prend un arc donné un nombre de fois suffisant, on peut toujours obtenir un arc dépassant tout arc donné à l'avance.*

2) *Une suite d'arcs emboîtés les uns dans les autres et tels qu'il s'en puisse toujours indiquer un, et les suivants, qui soient contenus dans un arc arbitrairement choisi converge vers un point déterminé.*

En utilisant ces propositions il est aisé de démontrer le théorème fondamental sur l'intersection des cercles :

Si A est un point intérieur et B celui extérieur par rapport au cercle considéré, l'arc de tout autre cercle joignant A à B n'a avec le premier qu'un point commun et un seul.

La démonstration de ce théorème est absolument identique à celle du théorème sur l'intersection d'un cercle avec un segment.

8. Le cinquième groupe d'axiomes de géométrie est lié à la notion de *parallélisme* et contient un seul axiome que voici :

Par un point quelconque non situé sur une droite donnée il passe au plus une parallèle à cette droite.

Les énoncés découlant de cet axiome étant bien connus, nous ne nous arrêterons pas à ces démonstrations.

Le système d'axiomes examiné permet de se faire une idée sur l'ensemble de propositions indémontrables que l'on peut prendre comme base axiomatique. Il faut tout de même souligner que tout en cherchant à simplifier au maximum notre exposé, nous n'avons pas posé comme but de rendre ce système le plus restreint possible. On pourrait encore diminuer le nombre de ces axiomes. Ainsi, par exemple, les deux axiomes, ceux d'Archimède et de Cantor, pourraient être remplacés par le postulat de Dedekind. On pourrait affaiblir les restrictions imposées par les axiomes ci-dessus. Ainsi, dans l'axiome de Pasch on peut bien se passer de l'exigence qu'une droite coupant l'un des côtés d'un triangle coupe encore l'un, et l'un *seulement*, des deux autres côtés. Il s'avère, en effet, qu'on peut s'en tirer avec la seule restriction qu'une droite coupant l'un des côtés d'un triangle coupe encore l'un de ses côtés. Le fait que ce côté s'avérera l'*unique* est facile à démontrer. Il en est de même pour l'axiome de Cantor où l'on peut bien se passer de la restriction qu'un point déterminé par une suite d'intervalles emboîtés soit l'unique. Ce fait peut être démontré. Toutefois, cela pourrait rendre notre exposé plus compliqué et plus long.

Résumons donc brièvement le contenu de ce livre.

1) Nous avons déterminé la géométrie comme une science traitant les formes de l'espace du monde matériel.

2) Nous avons obtenu les connaissances primaires des propriétés de l'espace par l'induction, en d'autres termes, à l'aide des expériences et observations multiples.

3) Les propriétés spatiales des corps les plus générales et les plus profondes sont formulées comme un système de propositions fondamentales — base axiomatique.

4) Une base axiomatique ne peut refléter d'une façon correcte les propriétés de l'espace réellement existantes que si elle satisfait aux conditions de l'indépendance, de l'intégrité et de la non-contradiction.

5) Toutes les autres propositions géométriques, théorèmes, se déduisent d'axiomes et propositions déjà démontrées. Ce processus s'appelle démonstration.

6) Pour qu'une démonstration soit correcte, c.-à-d. pour que la justesse d'un théorème soit hors de doute, il faut qu'elle soit délivrée de toute erreur et bien construite. La justesse d'une démonstration est déterminée par :

1) une formulation exacte de la proposition à démontrer,

2) un choix correct d'arguments justes et nécessaires,

3) une stricte observation de règles logiques.

I. Doubnov

Erreurs dans les démonstrations géométriques

INTRODUCTION

Il y a quarante ans le mathématicien-pédagogue bien connu à l'époque N. Izvolski a reproduit dans un article, consacré aux problèmes de l'enseignement de géométrie, un dialogue typique qu'il avait eu avec une écolière de sa connaissance. La petite fille a terminé sa cinquième et étudié au cours d'une année la géométrie. Cette conversation avait eu lieu lors des vacances dans une ambiance bien aisée. L'instituteur a demandé la petite qu'avait-elle appris du cours de géométrie. La fillette était restée pensive un bon petit moment mais, hélas, elle n'a pu rien se rappeler. Alors la question était formulée autrement: « Qu'avez-vous fait toute une année pendant vos leçons de géométrie ? » La réponse ne s'est faite attendre: « Nous avons effectué toutes sortes de démonstrations ». La réponse est évidemment peu intelligible mais elle reflète dans sa naïveté parfaite les idées que se font les écoliers: en arithmétique on résout des problèmes, en algèbre, de plus, on résout des équations et on établit des formules, et, enfin, en géométrie on démontre des théorèmes. Il faut dire qu'une telle idée des mathématiques ne correspond plus à l'état actuel de cette science. Dans les études mathématiques de notre époque, s'il s'agirait de nombres ou de figures, le titre « théorème » avec une démonstration qui le suit s'est répandu d'une façon identique. Dans tous les domaines des mathématiques on résout des problèmes et en géométrie on a souvent recours à la résolution des équations. Il y a 2000 ans, à l'époque où l'on a mis la dernière main à la géométrie d'Euclide qui est jusqu'à présent à la base de tout cours d'école, c'était évidemment bien autre chose. Dès lors et jusqu'à nos jours tout cours de géométrie qui représente d'ailleurs toute une série de théorèmes (dont certains sont des lemmes ou des corollaires) est fait d'après un plan tellement rigou-

reux qu'il suffit de le rappeler en gros. Chaque théorème a certaines données (« on donne... ») et la conclusion (« il faut démontrer que... ») ; lors de la démonstration on ne peut faire appel qu'à des axiomes et théorèmes déjà démontrés ; il est interdit de faire recours aussi bien à l'« évidence », qui nous trompe d'ailleurs assez souvent, qu'aux théorèmes, bien qu'ils soient justes, non démontrés (ces derniers peuvent parfois être basés sur celui à démontrer, donc le voilà un « cercle vicieux »).

Le rôle joué dans la démonstration géométrique par un dessin n'est pas à souligner ici une fois de plus : celui-ci non seulement rend plus accessible le contenu d'un théorème, mais également le train même de la démonstration. Il arrive souvent d'accompagner la démonstration d'un théorème quelconque de plusieurs dessins, car celle-ci subit des modifications considérables pour tel ou tel arrangement des parties d'une figure géométrique (exemple : théorème sur l'angle inscrit dont la démonstration révèle trois possibilités : le centre du cercle se trouve sur un côté de l'angle, à l'intérieur ou, enfin, est extérieur à cet angle). Il importe ici qu'on examine tous les cas possibles de la disposition des parties d'une figure ; l'omission d'un seul cas quelconque pour lequel les mêmes raisonnements ne sont plus valables rend erronée toute la démonstration — il peut bien se faire que c'est justement pour ce cas que le théorème n'est plus vérifié.

Il ne faut bien sûr ni exagérer ni sous-estimer le rôle du dessin. Ce serait une outrance de considérer le dessin comme partie intégrante d'une démonstration. Théoriquement parlant, toute démonstration géométrique peut bien être faite sans aucun dessin, ce qui aurait d'ailleurs un avantage de ne pas prétexter l'« évidence » souvent illusoire et gros d'erreurs assez sérieuses. D'autre part, tout refus d'avoir recours au dessin peut provoquer de telles difficultés qu'on a par exemple si l'on veut calculer mentalement des nombres de plusieurs chiffres (ou en voici encore

un d'un autre domaine — jouer aux échecs « sans regarder l'échiquier ») — bref, le danger de tomber dans l'erreur serait infiniment plus grand. Quand on parle de l'aide qu'apporte le dessin à la démonstration géométrique on a certainement en vue un bon dessin soigneusement fait. Les écoliers sont parfois d'avis qu'en dessinant scrupuleusement ils font surtout plaisir à l'instituteur. Mais en réalité par un dessin peu soigné ils infligent tout d'abord une vraie punition à eux-mêmes, car un tel dessin rend toute démonstration bien plus difficile. Qu'ils ne se fassent des illusions sur le fait d'avoir mené parfois la démonstration à bonne fin à l'aide d'un dessin peu soigné — ce n'est qu'une chance à ne pas se répéter toujours. Dans ce livre le lecteur trouvera les dessins corrects et ceux partiellement altérés à bon escient. Le fait est que nous attirons l'attention du lecteur sur les démonstrations erronées dont la compréhension exige parfois des dessins peu précis (de même qu'on les utilise dans les démonstrations « par l'absurde »).

Dans ce qui suit, chapitres I et III, le lecteur trouvera toute une série des démonstrations géométriques fausses. Nous préférons de classifier ces erreurs un peu plus tard, après avoir examiné les exemples correspondants. Mais dès maintenant il faut prévenir le lecteur en ce qui concerne le caractère des hypothèses qu'on démontre (faussement) ci-dessous.

Parmi ces hypothèses le lecteur rencontrera celles dont la fausseté est évidente : l'« angle droit est égal à celui obtus », par exemple. Dans ce cas il s'agit de découvrir des erreurs qui se sont glissées dans la démonstration. De telles démonstrations des hypothèses notoirement fausses et connues dès l'antiquité sont appelées « sophismes ».

Dans d'autres cas, le lecteur ne saura pas d'avance, à moins qu'il ne les eût pas rencontrées auparavant, si de telles hypothèses sont justes ou fausses. Il est clair que ce fait rend notre tâche plus difficile : il faut vérifier non seu-

lement la faiblesse d'arguments de la démonstration mais, de plus, la fausseté de l'hypothèse *).

Nous allons donner, enfin, certaines démonstrations qui sont fausses du fait qu'une hypothèse ne peut aucunement être démontrée par des moyens à la disposition du lecteur. Pour une meilleure assimilation de cette idée voici un exemple qui n'a rien d'ailleurs à voir ni avec la géométrie ni avec la science en général.

Le problème amusant que voici est bien connu : « Un bateau se trouve en pleine mer à 42° 15′ de latitude nord et 17° 32′ de longitude ouest (les nombres sont choisis au hasard ; pour compliquer le problème on y ajoute souvent certaines données supplémentaires). Le capitaine de ce bateau, quel âge a-t-il ? » A nos fins modifions un peu cette dernière question : « L'affirmation que le capitaine a déjà dépassé ses 45 ans est-elle juste ? ». Il est clair qu'il est impossible d'en venir à une telle conclusion en partant des données ci-dessus et que toute tentative de démontrer cette affirmation est vouée à l'échec. Bien plus, on peut même prouver qu'elle est indémontrable. En effet, un service de navigation (sur lequel nous ne savons rien des données du problème) peut faire pour ce bateau toute traversée passant par le point aux coordonnées indiquées plus haut et nommer pour cette traversée tout capitaine de n'importe quel âge (à des suppositions, bien sûr, que ce service de navigation dispose de capitaines de tout âge).

En d'autres termes, on peut admettre que le capitaine n'a pas encore ses 45 ans sans que cela contredise d'une manière ou d'une autre les données du problème sur les coordonnées du bateau. Mais si les données du problème contenaient de plus d'autres indications, le nom du bateau ou la date précise de son passage par le point indiqué par exemple,

---

*) Il ne suffit pas de se borner à la première étape : en effet, une affirmation juste peut bien être appuyée de preuves erronées (ainsi, par exemple, de l'égalité fausse $3 + 5 = 12$ on peut tirer une conclusion parfaitement juste : $3 + 5$ est un nombre pair).

alors on pourrait espérer d'apprendre, à l'aide du journal du bord, le nom du capitaine et son âge.

Donc il existe des hypothèses dont la justesse peut ou ne peut pas être démontrée, selon les moyens qu'on dispose pour leur démonstration.

En revenant à la matière, posons la question suivante: est-ce vrai que la somme des angles de tout triangle est égale à 2dr ? Tout écolier, appris du cours de géométrie les propriétés des droites parallèles, sait bien démontrer ce théorème fort important, mais on ignore souvent son historique de 2000 ans. Cette démonstration se fonde sur les propriétés des angles formés par des droites parallèles avec une transversale, ces propriétés découlant du « postulat des parallèles »: par un point du plan non situé sur une droite donnée il ne passe qu'une seule parallèle à celle-ci *). Dès l'époque d'Euclide au cours de plus de deux millénaires on a déployé bien d'efforts pour transformer cet axiome en un théorème, c.-à-d. le démontrer en faisant recours à des propositions qui précèdent, dans les œuvres d'Euclide et nos cours d'école modernes de géométrie, le postulat des parallèles. Par cela même il était interdit de remplacer cet axiome par un autre quelque évident qu'il soit. Toutes ces tentatives ont échoué en révélant seulement que ce postulat des parallèles peut être remplacé de différentes façons par d'autres axiomes. En particulier, si l'on prend pour axiome une des propriétés des angles formés par deux droites parallèles et une transversale ou bien le théorème concernant la somme des angles d'un triangle, le postulat des parallèles devient alors un théorème. Ce n'est que dans les années 20 du siècle dernier que le grand mathématicien russe N. Lobatchevski (1792-1856) a su mettre à jour les causes de l'échec de toutes les tentatives de démontrer le postulat des parallèles. Il a

*) Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que le caractère axiomatique de cette proposition réside dans les mots « ne . . . que »: le fait déjà démontré qu'on peut toujours mener une seule parallèle découle ne serait-ce que du théorème suivant: « deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles ».

construit une théorie vaste et profonde dont on ne donne pas ici même une idée superficielle. Cette théorie donne, entre autres, sous une forme implicite la démonstration de l'impossibilité de démontrer le postulat d'Euclide par des procédés que bien des savants avant Lobatchevski (et de son vivant) ont utilisés pour la démonstration. Quelque compliquée que soit la théorie de Lobatchevski et quelque naïf qu'il soit, d'autre part, le problème sur l'âge du capitaine, néanmoins, la « démonstration de l'impossibilité de la démonstration » dans les deux cas est de la même nature : on s'assure sur des exemples concrets (« modèles ») que les deux hypothèses incompatibles peuvent être en accord avec les mêmes données initiales. Pour l'axiome en question cela signifie que des données précédant dans un cours habituel de géométrie le postulat des parallèles il ne découle ni la justesse ni la fausseté de l'axiome considéré.

On sait maintenant que toute démonstration du postulat des parallèles ou d'un autre axiome équivalent est fausse si elle n'invoque que les propositions qui précèdent cet axiome. Le lecteur trouvera ci-dessous quelques exemples fort simples de telles démonstrations erronées.

I. ERREURS DANS LES RAISONNEMENTS À LA PORTÉE DES DÉBUTANTS

Passons maintenant aux exemples des démonstrations erronées sans oublier que leur analyse critique est reportée au chapitre II. Le lecteur est déjà au courant que certains dessins de ce livre sont sciemment altérés, ce qui n'est pas parfois visible au premier abord.

● EXEMPLE 1. *Un carré de côté* 21 (cm) *a la même aire qu'un rectangle de côtés* 34 (cm) *et* 13 (cm).

Un carré Q est divisé en deux rectangles 13×21 et 8×21 (fig. 1 ; dans ce qui suit, nous omettrons la notation «cm ») ; le premier rectangle est divisé à son tour en deux trapèzes rectangles identiques de bases 13 et 8 et le deuxième, en deux triangles rectangles de côtés 8 et 21. Avec quatre parties ainsi obtenues on forme un rectangle R, comme indiqué sur la fig. 1, à droite (les parties identiques du carré et du rectangle sont marquées par les mêmes chiffres romains).

Plus précisément, on applique le triangle rectangle *III* au trapèze rectangle *I* de façon que les angles droits adjacents au côté commun 8 soient supplémentaires, on obtient ainsi un triangle rectangle de côtés 13 et $13 + 21 = 34$. Un triangle absolument identique se forme des parties *II* et *IV* ; avec deux triangles rectangles égaux ainsi obtenus on forme, enfin, le rectangle R de côtés 13 et 34. Son aire est $34 \times 13 = 442$ (cm^2), tandis que l'aire du carré Q, composé des mêmes parties, est $21 \times 21 = 441$ (cm^2). D'où l'on a pris donc ce centimètre carré « de trop » ? Nous recommandons au lecteur de faire une expérience : découper en papier (surtout en papier quadrillé, en prenant la longueur de chaque carreau pour 1 cm) le carré Q, le découper ensuite en 4 parties, tout en observant les dimensions indiquées, pour en former, enfin, le rectangle R.

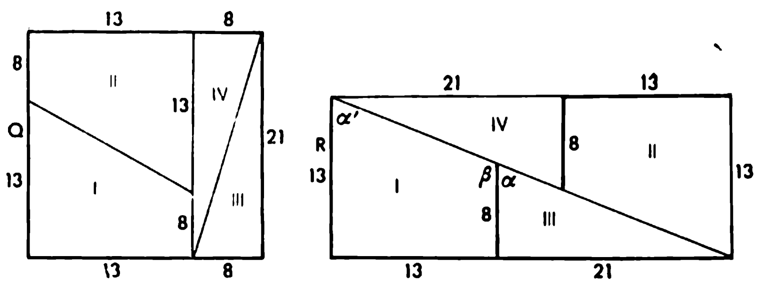


Fig. 1

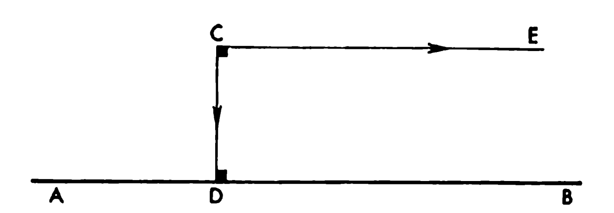


Fig. 2

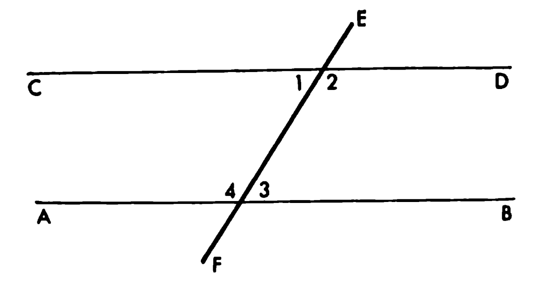


Fig. 3

● EXEMPLE 2. *Démonstration du postulat des parallèles.*

Soient une droite AB et un point C extérieur à cette droite. Il faut démontrer que par le point C on ne peut mener qu'une parallèle à AB. Appliquons un procédé bien connu: par le point C menons la perpendiculaire CD à la droite AB (fig. 2, ici et dans ce qui suit les angles droits sur les dessins sont marqués par des petits carrés noircis); par le point C traçons la perpendiculaire CE à CD. En vertu du théorème bien connu sur les deux perpendiculaires à une même droite, la perpendiculaire CE sera parallèle à la droite AB (remarquons qu'il est ici légitime de se référer à ce théorème, car il est démontré avant le postulat des parallèles). Mais par le point on ne peut mener qu'une s e u l e perpendiculaire à la droite, et par le point appartenant à la droite on ne peut tracer qu'une s e u l e perpendiculaire à cette même droite (ces deux propositions sont démontrées également avant le postulat des parallèles), donc, la droite parallèle CE ainsi obtenue est u n i q u e.

● EXEMPLE 3. *Si les droites parallèles sont coupées par la sécante, la somme des angles intérieurs situés d'un même côté de la sécante vaut deux droits* (2dr) (*pour la démonstration on n'a pas recours au postulat des parallèles*).

Soient $AB \parallel CD$ et EF une sécante (fig. 3); les angles intérieurs sont notés sur le dessin par des chiffres. Les trois hypothèses suivantes sont alors possibles *):

1) Somme des angles intérieurs du même côté >2 dr.
2) Somme des angles intérieurs du même côté <2 dr.
3) Somme des angles intérieurs du même côté $= 2$ dr.

*) Ici et dans ce qui suit, en parlant d'hypothèses possibles ou de cas possibles, on n'affirme aucunement qu'ils sont effectivement admissibles pour les données d'un tel ou tel exemple. Bien au contraire, il peut souvent arriver qu'une hypothèse admise comme possible s'avérera fausse, c.-à-d. contraire à une condition ou à un fait qu'on croit établi, c'est bien le cas des démonstrations par l'absurde. Il s'agit donc toujours des « possibilités a priori », c.-à-d. des possibilités qui se présentent d'avance, sans que l'on prend en considération d'autres conditions du problème.

De la première hypothèse il s'ensuit :

$$\hat{1} + \hat{4} > 2 \text{ dr}, \qquad \hat{2} + \hat{3} > 2 \text{ dr},$$

d'où

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} > 4 \text{ dr},$$

tandis que la somme des quatre angles intérieurs (deux paires d'angles adjacents supplémentaires) est, en réalité, égale à 4 droits. La contradiction ainsi obtenue nous permet de négliger la première hypothèse. Pour cette même raison nous devons renoncer à la deuxième hypothèse, car elle nous amène à la conclusion que la somme des quatre angles intérieurs <4 droits. La troisième hypothèse reste ainsi la seule possible (elle ne nous amène pas à la contradiction), le théorème est donc démontré.

● EXEMPLE 4. *La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits (pour la démonstration on n'a pas recours au postulat des parallèles).*

Divisons un triangle ABC quelconque par un segment issu du sommet C en deux triangles et désignons les angles ainsi obtenus par des chiffres, comme il est indiqué sur la fig. 4. Soit x la somme inconnue des angles du triangle. Alors

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{6} = x,$$

$$\hat{3} + \hat{4} + \hat{5} = x.$$

En additionnant, on obtient

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} = 2x.$$

Mais la somme $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4}$ est la somme des angles du triangle ABC, elle est égale donc à x ; les angles $\hat{5}$ et $\hat{6}$ étant adjacents supplémentaires, leur somme vaut 2 droits. Ainsi, on trouve x à partir de l'équation $x + 2$ droits $= 2x$, d'où $x = 2$ droits.

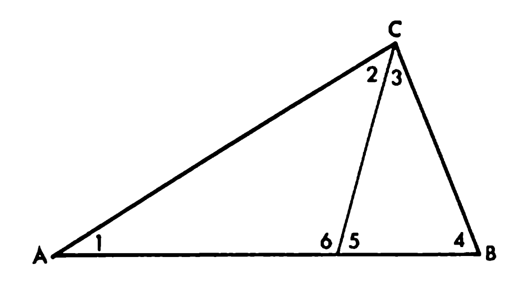


Fig. 4

● EXEMPLE 5. *Il existe un triangle, dont la somme des angles est égale à 2 droits (pour la démonstration on n'a pas recours au postulat des parallèles).*

Commençons par quelques remarques d'ordre purement historique. Le XVIIIe siècle et le début du XIXe siècle ont vu certains mathématiciens s'efforcer de répondre à la question suivante : que peut-on dire de la somme des angles d'un triangle sans avoir recours au postulat des parallèles *). On a constaté que la somme des angles d'un triangle ne peut dépasser 2 droits. Il ne restait que trois possibilités : cette somme 1) est toujours (c.-à-d. pour tous les triangles) égale à 2 droits ; 2) est toujours inférieure à 2 droits ; 3) est parfois égale, parfois inférieure à 2 droits. Par la suite la troisième hypothèse s'est avérée fausse. Alors on a déployé

*) Le lecteur peut trouver des nouvelles données historiques ainsi que les indications sur le rôle de N. Lobatchevski dans ces études dans l'article de B. Laptev « Théorie des droites parallèles dans les premières œuvres de N. Lobatchevski ». Etudes dans l'histoire des mathématiques, IV^c éd. Gostekhizdat, 1951.

tous les efforts pour trouver ne serait-ce qu'un seul triangle avec la somme des angles égale à 2 droits. Nous exposerons ci-dessous l'une de ces tentatives. Si l'on réussissait à la réaliser, le postulat des parallèles serait superflu.

Comme la somme des angles d'un triangle ne dépasse pas 2 droits, alors supposons que ABC (cf. fig. 4) soit un triangle ayant la somme des angles maximale (s'il y en a plusieurs, prenons n'importe lequel). Désignons cette somme par α. Ainsi, la somme des angles de tout autre triangle ne dépasse pas α et on obtient, avec les notations de la fig. 4,

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{6} \leqslant \alpha; \quad \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} \leqslant \alpha.$$

D'où $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} \leqslant 2\alpha$; mais par hypothèse $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = \alpha$ et, de plus, $\hat{5} + \hat{6} = 2$ droits; par conséquent, $\alpha + 2$ droits $\leqslant 2\alpha$, $\alpha \geqslant 2$ droits. α ne pouvant pas dépasser 2 droits, alors $\alpha = 2$ droits, c.-à-d. la somme des angles du triangle ABC est égale à 2 droits.

● EXEMPLE 6. *Tous les triangles sont isocèles.*

Soit ABC un triangle quelconque (fig. 5, ou 6, ou 7). Menons la bissectrice de l'angle C, puis l'axe de symétrie du côté AB (c.-à-d. une droite perpendiculaire à AB et passant par le milieu M du segment AB). Examinons les différents cas de disposition mutuelle de ces droites. En opérant avec une seule bissectrice et un seul axe de symétrie, convenons de les appeler « bissectrice » et « axe » tout court.

Cas 1: la bissectrice et l'axe ne se coupent pas, c.-à-d. soit ils sont parallèles, soit ils se confondent. Etant donné que l'axe est perpendiculaire à AB, la bissectrice l'est aussi, c.'-à-d. elle se confond avec la hauteur, donc, le triangle ABC est isocèle ($CA = CB$).

Cas 2: la bissectrice et l'axe se coupent à l'intérieur du triangle ABC (fig. 5), soit en un point N. Etant donné que ce point est équidistant des côtés de l'angle ACB, alors, en menant par ce point les perpendiculaires NP et NQ à CB et CA res-

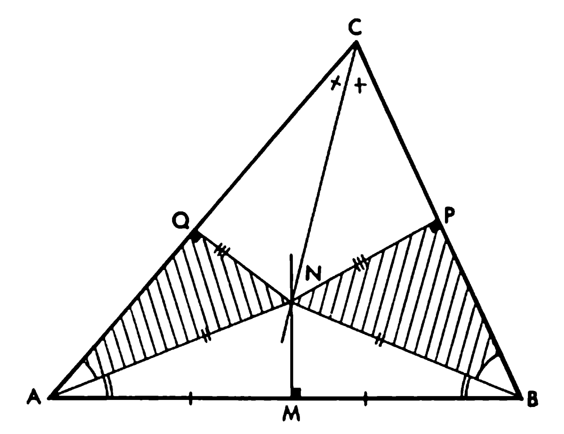


Fig. 5

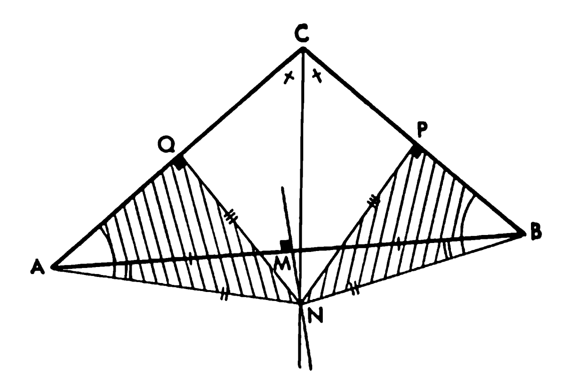


Fig. 6

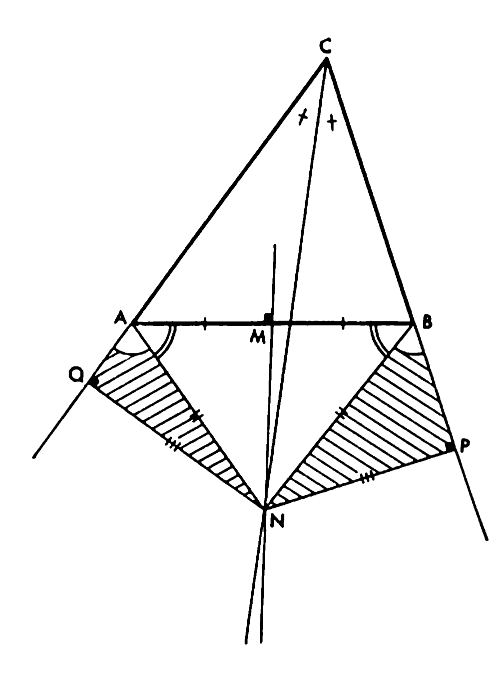


Fig. 7

pectivement, on obtient $NP = NQ$. Mais le point N est en même temps équidistant des extrémités du segment AB, c.-à-d. $NB = NA$. Les triangles rectangles NPB et NQA sont égaux comme ayant une hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, donc $\widehat{NAQ} = \widehat{NBP}$. En ajoutant à ces angles égaux les angles de même égaux NAB et NBA (comme des angles adjacents à la base d'un triangle isocèle ANB), on obtient $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$, d'où il s'ensuit que le triangle ABC est isocèle (notamment, $CA = CB$).

C a s 3 : l a b i s s e c t r i c e e t l'a x e s e c o u p e n t s u r l e c ô t é AB, c.-à-d. au milieu M de ce côté. Cela signifie que dans le triangle ABC la médiane et

la bissectrice menées du sommet C se confondent, d'où il s'ensuit que ce triangle est isocèle.

● REMARQUE. Nous devons mettre le lecteur en garde contre l'erreur éventuelle. On sait très bien que dans un triangle rectangle la médiane et la bissectrice coïncident. Mais nous invoquons ici la réciproque: « si dans un triangle quelconque la médiane et la bissectrice menées d'un même sommet coïncident, alors ce triangle est isocèle ». Formulé de cette façon le théorème inverse est également juste, mais sa démonstration peut être difficile pour le lecteur. C'est pourquoi nous donnerons ci-dessous l'une des démonstrations possibles. Supposons que le segment CM soit en même temps médiane et bissectrice du triangle ABC. En abaissant du point M les perpendiculaires MP et MQ sur les côtés CB et CA (on peut utiliser la fig. 5, si l'on considère que les points M et N se confondent, la droite MN étant alors superflue), on obtient les triangles rectangles égaux MPB et MQA. D'où, en prenant en considération l'égalité des angles MBP et MAQ, il s'ensuit que le triangle ABC est isocèle. Ce raisonnement est inachevé si l'on ne démontre pas que les points P et Q tombent exactement sur les côtés CB et CA et non pas sur leurs prolongements. L'un de ces points pourrait tomber sur le prolongement du côté correspondant si l'un des angles A et B était obtus. Soit, par exemple, l'angle B obtus, de sorte que le point P se trouve sur le prolongement du côté CB; on obtient de nouveau $\widehat{MAQ} = \widehat{MBP}$, mais cela nous amène à la contradiction, car le premier de ces angles est intérieur pour le triangle ABC, le deuxième — extérieur, et ces angles ne sont pas adjacents supplémentaires.

C a s 4a: l a b i s s e c t r i c e e t l'a x e s e c o u p e n t e n d e h o r s d u t r i a n g l e ABC; l e s p i e d s d e s p e r p e n d i c u l a i r e s, a b a i s s é e s d u p o i n t N d e l e u r i n t e r s e c t i o n s u r l e s c ô t é s CB e t CA, s e t r o u v e n t s u r c e s m ê m e s c ô t é s e t n o n p a s s u r l e u r s p r o l o n g e m e n t s. Comme auparavant on obtient les triangles égaux NPB et NQA et un triangle isocèle ANB. Les angles adjacents à la base AB du triangle ABC sont égaux, mais cette fois comme les différences (et non pas comme les sommes, cas 2) des angles respectivement égaux.

C a s 4b: l a b i s s e c t r i c e e t l'a x e s e c o u p e n t e n d e h o r s d u t r i a n g l e ABC; l e s p i e d s d e s p e r p e n d i c u l a i r e s, a b a i s s é e s

du point N de leur intersection sur les côtés CB et CA, se trouvent sur les prolongements de ces côtés (fig. 7). Les constructions et raisonnements analogues aboutissent à la conclusion sur l'égalité des angles extérieurs aux sommets A et B du triangle ABC. D'où il découle immédiatement l'égalité des angles intérieurs A et B et, par conséquent, $CA = CB$.

● EXEMPLE 7. *L'angle droit est égal à celui obtus.*

Par les extrémités du segment AB (fig. 8 ou 9) menons deux segments égaux AC et BD, se trouvant d'un même côté de la droite AB et formant avec elle un angle droit DBA et celui obtus CAB ; nous allons démontrer l'égalité de ces angles. En joignant C et D, on obtient un quadrilatère $ABCD$ dont les côtés AC et BD ne sont évidemment pas parallèles, de même que les côtés AB et CD (sinon, $ABCD$ serait un trapèze isocèle aux angles inégaux adjacents à la base AB). Pour chacun des segments AB, CD construisons son axe de symétrie. Vu que ces segments ne sont pas parallèles, les axes de symétrie leur étant perpendiculaires ne sont pas parallèles et ne se confondent pas, mais se coupent, disons, en un point N quelconque. Examinons les cas qui peuvent se présenter.

Cas 1: le point N est «au-dessus» de la droite AB, plus précisément il est situé de ce même côté de la droite AB que le quadrilatère $ABCD$ (cf. fig. 8, où le point N est intérieur au quadrilatère). Joignons ce point avec tous les sommets du quadrilatère ; étant donné qu'il est équidistant des extrémités du segment AB et du segment CD, les triangles NAC et NBD sont égaux (comme ayant les trois côtés égaux). D'où il s'ensuit que $\widehat{NAC} = \widehat{NBD}$. En ajoutant au premier de ces angles l'angle NAB et au deuxième l'angle NBA et en prenant en considération

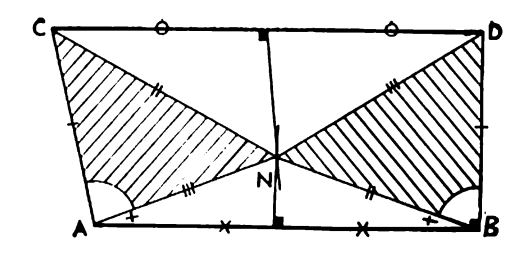


Fig. 8

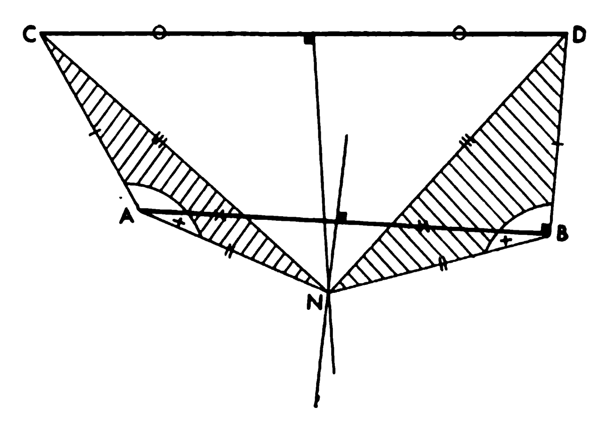


Fig. 9

que $\widehat{NAB} = \widehat{NBA}$ (comme les angles d'un triangle isocèle), on obtient $\widehat{CAB} = \widehat{DBA}$.

C a s 2 : l e p o i n t N s e t r o u v e s u r AB, c.-à-d. N est le milieu du segment AB. La démonstration précédente étant considérablement simplifiée, l'égalité $\widehat{CAB} = \widehat{DBA}$ découle immédiatement de l'égalité des triangles NAC et NBD.

C a s 3 : l e p o i n t N s e t r o u v e « a u-d e s s o u s » d e AB, c.-à-d. il est situé de l'autre côté, par rapport au quadrilatère $ABCD$, de la droite AB (fig. 9). De l'égalité des triangles il s'ensuit $\widehat{NAC} = \widehat{NBD}$, mais cette fois de ces angles il faut retrancher les angles égaux NAB et NBA pour retrouver $\widehat{CAB} = \widehat{DBA}$.

● EXEMPLE 8. *Si entre les éléments de deux triangles il existe une telle correspondance que deux côtés quelconques et l'angle opposé à l'un de ces côtés d'un triangle sont respectivement égaux aux éléments correspondants de l'autre, ces triangles sont égaux.* Bref : les triangles sont égaux s'ils ont deux côtés égaux et l'angle opposé à l'un de ces côtés égal.

Examinons deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ (fig. 10 ou 11, ou 12). Soit $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\hat{C} = \hat{C}_1$. Il faut démontrer l'égalité de ces triangles. Pour cela nous allons recourir au procédé que l'on utilise pour la démonstration de l'égalité des triangles ayant les trois côtés respectivement égaux : appliquons le triangle $A_1B_1C_1$ au triangle ABC de façon que les extrémités des côtés égaux (plus précisément ceux opposés aux angles égaux) AB et A_1B_1 se confondent (A avec A_1 et B avec B_1) ; alors le triangle $A_1B_1C_1$ (renversé) occupera la position ABC_2. Joignons les points C et C_2 et examinons les trois cas qui peuvent se présenter.

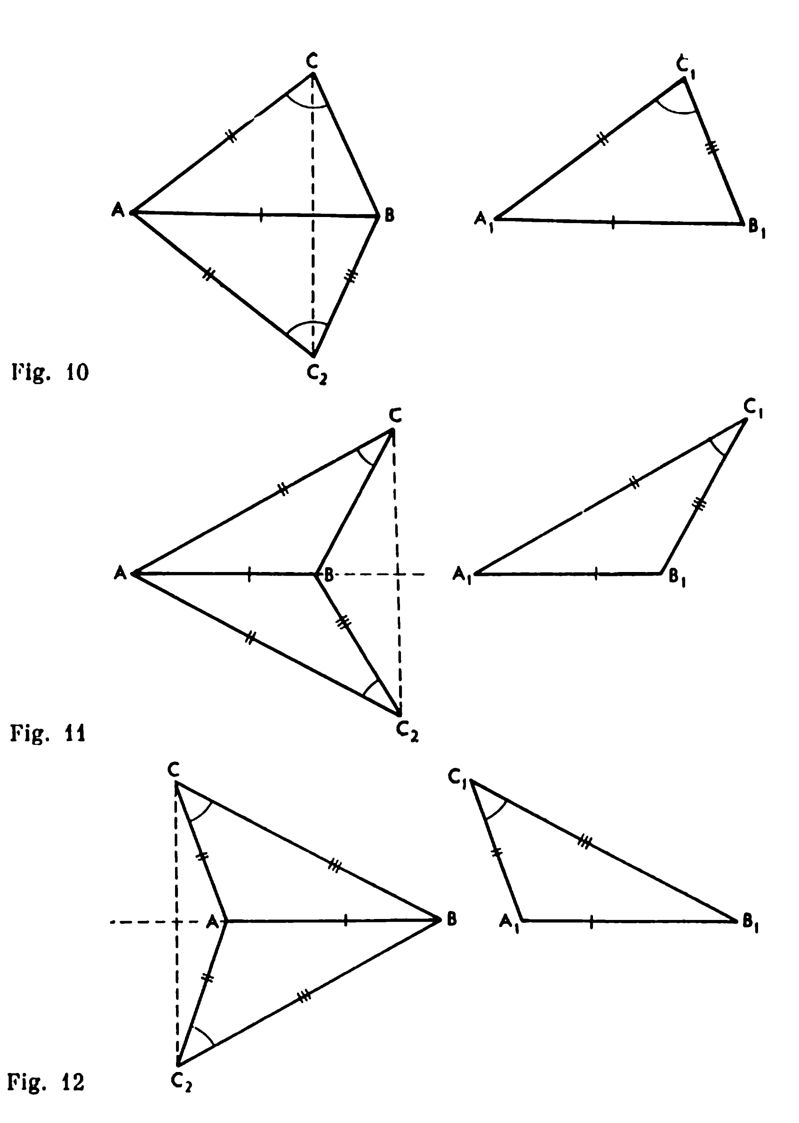


Fig. 10

Fig. 11

Fig. 12

C a s 1 : l a d r o i t e CC_2 c o u p e l e c ô t é AB e n s o n p o i n t i n t é r i e u r (fig. 10). Le triangle ACC_2 étant isocèle, $\widehat{ACC_2} = \widehat{AC_2C}$; retranchant ces angles égaux respectivement des angles ACB et AC_2B égaux selon les données du problème, on obtient $\widehat{BCC_2} = \widehat{BC_2C}$. Cela signifie que le triangle CBC_2 est, à son tour, isocèle, notamment $CB = C_2B$, d'où $CB = C_1B_1$, et les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont égaux comme ayant tous les côtés égaux.

C a s 2 : l a d r o i t e CC_2 c o u p e l e p r o l o n g e m e n t d u c ô t é AB a u-d e l à d u p o i n t B (fig. 11). Le raisonnement reste le même et l'on ne change que l'ordre de soustraction : des angles égaux ACC_2 et AC_2C on retranche les angles égaux ACB et AC_2B.

C a s 3 : l a d r o i t e CC_2 c o u p e l e p r o l o n g e m e n t d u c ô t é AB a u-d e l à d u p o i n t A (fig. 12). Les raisonnements sont analogues à ceux du cas 1, mais la soustraction est remplacée par l'addition : aux angles égaux ACC_2 et AC_2C on ajoute les angles égaux ACB et AC_2B.

● EXEMPLE 9. *Un rectangle inscrit dans un carré est également un carré* *). Plus précisément : si le rectangle $MNPQ$ (fig. 13) est inscrit dans le carré $ABCD$ de sorte que sur chaque côté du carré se trouve l'un des sommets du rectangle (dans le cas considéré, M sur AB, N sur BC, P sur CD, Q sur DA), alors ce dernier est également un carré.

Commençons par abaisser à partir des points P et Q les perpendiculaires PR et QS sur AB et BC respectivement. Ces perpendiculaires, dont chacune est égale au côté du carré $ABCD$, sont égales entre elles. Elles sont des côtés de l'angle droit des triangles PRM et QSN, dont les hypoténuses, comme diagonales du rectangle $MNPQ$, sont à leur tour égales entre elles. D'où il s'ensuit l'égalité des triangles (hachurés

*) On espère bien que le lecteur ne prenne pas pour contradictoire la phrase que voici : « le rectangle... est... un carré ». Il va de soi que ce ne sont pas tous les rectangles, mais certains d'entre eux qui représentent des carrés.

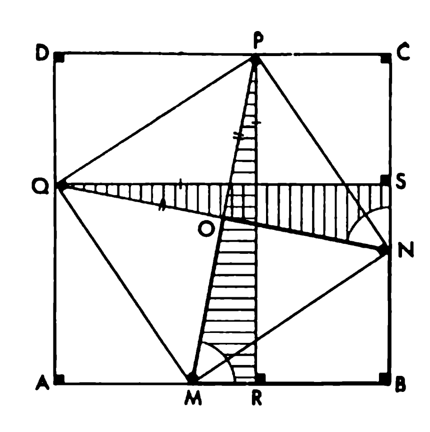


Fig. 13

sur la fig. 13) et des angles:

$$\widehat{PMR} = \widehat{QNS}.$$

Examinons à présent le quadrilatère $MBNO$ (marqué sur la fig. 13 en traits gras ; O — point d'intersection des diagonales du rectangle $MNPQ$) ; son angle extérieur au sommet N est égal à l'angle intérieur au sommet M, par conséquent, la somme de deux angles intérieurs aux sommets M et N est égale à 2 droits. La somme des angles intérieurs aux sommets B et O doit être la même, mais l'un d'eux ($\hat{B}$) est droit, donc, l'angle O l'est aussi, c.-à-d. les diagonales du rectangle sont perpendiculaires entre elles, mais c'est bien, parmi les rectangles, le carré qui possède cette propriété. La démonstration est donc terminée.

● EXEMPLE 10. *La perpendiculaire et l'oblique à une même droite ne se coupent pas.* C'est une modification d'un

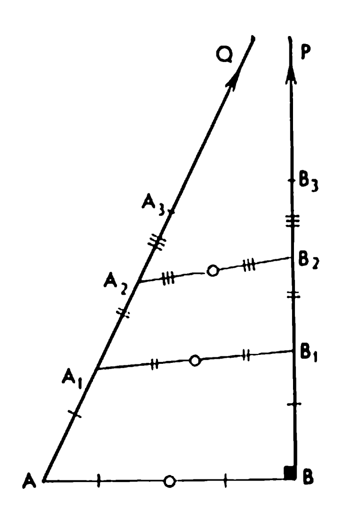


Fig. 14

sophisme antique bien connu que l'on doit au mathématicien grec Proclus (Ve s.) *). Précisons un peu notre hypothèse : aux points A et B de la droite AB (fig. 14) on mène d'un même côté de cette droite deux rayons : AQ qui forme un angle aigu BAQ avec la droite AB et BP perpendiculaire à AB (pour préciser que ce sont des rayons, on les a marqués sur le dessin par des flèches). Il faut démontrer que ces rayons ne se coupent pas.

Divisons le segment AB en deux et portons sur chacun des rayons AQ et BP $^1/_2AB$; ainsi $AA_1 = BB_1 = {}^1/_2AB$. La perpendiculaire et l'oblique ne peuvent pas se couper sur les segments AA_1 et BB_1, c.-à-d. les segments AA_1 et BB_1 ne peuvent pas avoir un point commun. En effet, s'il existait un tel point commun (K), on aurait obtenu un triangle (AKB), dont la somme de deux côtés ($AK + KB$) serait inférieure ou égale à son troisième côté (AB), ce qui

*) Pour l'exposé de ce sophisme chez Proclus voir *Bonola R.* La geometria non-euclidea; exposizione storico, critico del suo sviluppo. Bologna, 1906.

est impossible. Joignant les points A_1 et B_1 refaire les constructions précédentes: à partir des points A_1 et B_1 reportons sur chaque rayon AB et BP suivant sa direction $^1/_2 A_1B_1$, alors nous obtenons $A_1A_2 = B_1B_2 = {}^1/_2 A_1B_1$. Selon ce que nous avons dit plus haut, les segments A_1A_2 et B_1B_2 ne peuvent pas avoir un point commun, en particulier, A_2 ne peut pas coïncider avec B_2; alors, divisons le segment A_2B_2 en deux et faisons $A_2A_3 = B_2B_3 = {}^1/_2 A_2B_2$, et ainsi de suite (il faut souligner tout particulièrement qu'on porte chaque fois les segments égaux $A_nA_{n+1} = B_nB_{n+1} = {}^1/_2 A_nB_n$ sur les deux rayons suivant la direction de chaque rayon, donc cette procédure est parfaitement légitime). Ce processus se poursuivra indéfiniment; il ne pourrait s'interrompre que si le segment A_nB_n avait disparu, c.-à-d. si les points A_n et B_n d'un même numéro s'étaient confondus mais, comme nous l'avons vu, c'est impossible (il est d'ailleurs évident qu'une telle coïncidence est impossible, ce qui découle immédiatement du fait qu'autrement on aurait obtenu un triangle rectangle, dont l'hypoténuse AA_n était égale au côté de l'angle droit BB_n). Donc, à chaque étape de ce processus infini la perpendiculaire et l'oblique ne peuvent pas se couper, alors cela n'a jamais lieu.

Ainsi on a examiné toute une série de raisonnements qui semblent, à première vue, aussi probants que les démonstrations tirées du cours de géométrie. Parfois ces raisonnements servent à démontrer des absurdités évidentes, dans d'autres cas, la fausseté des hypothèses à démontrer est voilée, mais le lecteur est déjà averti que certaines erreurs se sont glissées dans tous les raisonnements considérés.

Avant de passer à l'analyse détaillée (chapitre II) des cas ci-dessus, on adresse au lecteur une fois de plus un conseil instant d'essayer de relever personnellement toutes ces erreurs. Même si l'on ne parvient pas à le faire totalement, les réflexions personnelles poseront les fondements nécessaires pour la lecture du chapitre II. Le cas réussi, le lecteur

comparera ses propres interprétations avec celles exposées au chapitre II. Etant donné que ce travail exige une certaine expérience, on donne ci-dessous quelques conseils et indications utiles.

1. Réfuter une démonstration géométrique erronée c'est d'y révéler une faute logique. La difficulté consiste en ce que toutes les démonstrations en question sont presque partout correctes et ne renferment qu'une certaine lacune qu'il faut mettre en évidence.

2. En soumettant une démonstration à la critique, on dit souvent qu'elle est faite à l'aide d'un « dessin inexact ». Ce n'est d'ailleurs pas une formulation heureuse, en tout cas elle est loin d'être complète. Quand on dit qu'un dessin A n'est pas exact et doit donc être remplacé par un autre, disons B, on masque par cela un état des choses suivant : lors de la démonstration on n'a pas examiné tous les cas possibles (ce qui est une faute logique d'ailleurs !), le dessin A ne donne que des cas qui s'avéreront plus tard contraires aux données d'un théorème et l'on a omis ceux (dessin B) qui sont en parfait accord avec ces mêmes données. Ainsi, la faute n'est pas dans l'imprécision du dessin, mais dans le fait qu'on n'a pas énuméré tous les cas possibles.

3. Si, par exemple, le dessin A représente un cas qui nous amène à l'absurde, il suffit de montrer que, grâce au dessin B, on n'en vient pas à la même conclusion pour démontrer d'une façon indirecte (« par l'absurde ») l'impossibilité du cas A. Il est de plus désirable (mais non pas obligatoire !) de démontrer de façon directe que l'hypothèse mène nécessairement au cas B (voir les exemples dans le chapitre II).

4. Bien qu'un dessin ne puisse de lui-même ni révéler la fausseté, ni prouver la justesse d'une hypothèse, néanmoins on recommande de faire autant que possible des dessins précis (avec des instruments). Là où on a affaire à un sophisme évident il faut faire un dessin de façon à mettre en relief l'absurdité d'une conclusion. Dans l'exemple 7, il vaut mieux prendre l'angle obtus proche de 180° ; dans

l'exemple 10, tracer une perpendiculaire et une oblique se coupant déjà dans les limites du dessin, etc. Un tel dessin peut montrer où est l'erreur.

5. Parfois une erreur n'a rien à voir avec le dessin et consiste, par exemple, en ce qui suit : on démontre (et d'une façon correcte) une hypothèse autre que celle à démontrer et celui qui le fait ou ne voit pas lui-même une telle substitution ou bien le fait sciemment dans l'espoir que personne ne la révélera non plus.

6. Quand on ne connaît pas si une proposition à démontrer est vraie ou non, il vaut mieux (ce n'est d'ailleurs pas obligatoire) essayer de le savoir au juste. Il est à retenir qu'une hypothèse est réfutée si l'on trouve ne serait-ce qu'un seul exemple contraire à cette hypothèse.

Le lecteur comprendra mieux le sens des indications ci-dessus après avoir analysé les exemples proposés et lu le chapitre suivant. Il est donc utile de faire appel à ces indications lors de la lecture du chapitre II.

II. ANALYSE DES EXEMPLES DU CHAPITRE I

● EXEMPLE 1. En prétendant qu'avec les parties *I*, *II*, *III*, *IV* d'un carré on puisse former un rectangle, nous avons confiance soit en une apparence mal fondée, soit en une expérience imprécise (si l'on découpe ce rectangle en papier). Quelle est en effet la raison pour considérer que les figures *I* et *III* (ou, ce qui revient au même, *II* et *IV*), appliquées l'une à l'autre, forment un triangle, c.-à-d. que le côté latéral oblique du trapèze *I* et l'hypoténuse du triangle *III* constituent une droite sans former un « angle » en un point commun de ces segments ? Le fait qu'on ne le voit pas sur le dessin ou sur le patron en papier n'est évidemment pas un argument : même faisant abstraction de l'imperfection de nos perceptions visuelles, il faut dire qu'elles ont surtout trait aux modèles physiques et non pas aux figures géométriques, donc on ne peut s'en servir pour les démonstrations géométriques *).

Il suffit de révéler cette lacune pour reconnaître injustifiée toute la démonstration ou, tant que la lacune n'est pas comblée, on peut même se refuser à la discuter. Mais nous allons quand même mettre en évidence ce problème.

Si, par exemple, on réussissait à démontrer que la somme des angles α et β (fig. 1) vaut 2 droits ou que les angles α et α' sur cette figure sont égaux, alors l'absence de « rupture » recevrait un fondement et la démonstration s'avérerait juste. Est-ce possible ? Si l'on raisonne de façon indirecte, notamment par l'absurde, la réponse est négative : en effet, une réponse positive nous donne l'égalité du type $441 = 442$.

D'ailleurs on peut s'assurer directement que les angles

*) Ce n'est pas d'emblée que l'humanité en est venue à cette conclusion. Ainsi, au cours des fouilles d'un temple indien, construit mille ans avant notre ère, on a découvert certaines notes mathématiques dont une figure géométrique gravée sur pierre. Il s'agissait évidemment d'une règle de la détermination de l'aire d'un cercle ; au lieu d'une démonstration on a écrit près de cette figure : « regarde ! ».

α et α' ne sont pas égaux et en même temps déterminer lequel d'entre eux est le plus grand. L'exposé ci-dessous peut être compris par tout lecteur possédant des notions même élémentaires de trigonométrie (au lieu de la trigonométrie on peut utiliser les propriétés des triangles semblables). Du triangle *III* (fig. 1) il découle que :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{8} .$$

Si du sommet de l'angle β du trapèze *I* on abaisse une perpendiculaire (elle n'est pas représentée sur la fig. 1) sur la plus grande base, on obtient un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont égaux à 13 et $13 - 8 = 5$, d'où

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{13}{5} .$$

Etant donné que $\frac{21}{8} > \frac{13}{5}$, notamment $\frac{21}{8} - \frac{13}{5} = \frac{1}{40}$, il s'ensuit que $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \alpha'$, d'où

$$\alpha > \alpha', \quad \alpha + \beta > 2 \text{ dr.}$$

L'image s'éclaircit donc : on peut, en effet, insérer à l'intérieur d'un rectangle les parties *I*, *II*, *III*, *IV* du carré, mais celles-ci ne couvrent pas entièrement tout le rectangle et laissent un « interstice » en forme de parallélogramme extrêmement étiré dirigé suivant la diagonale du rectangle. Il n'est pas étonnant que nous ne le distinguons pas : sur une distance de 36,4... (cm), son aire ne dépasse pas 1 (cm^2), c'est justement le surplus décelé au cours du passage du carré *Q* au rectangle *R*. Pour rendre l'image plus explicite modifions les données numériques du problème, comme cela est fait, par exemple, sur la fig. 15, où l'aire de cet « interstice » est de 99 (cm^2), tandis que celle du rectangle tout entier est de 540 (cm^2).

● EXEMPLE 2. L'erreur commise dans ce cas est très fréquente ; elle a déjà été mentionnée dans la logique classi-

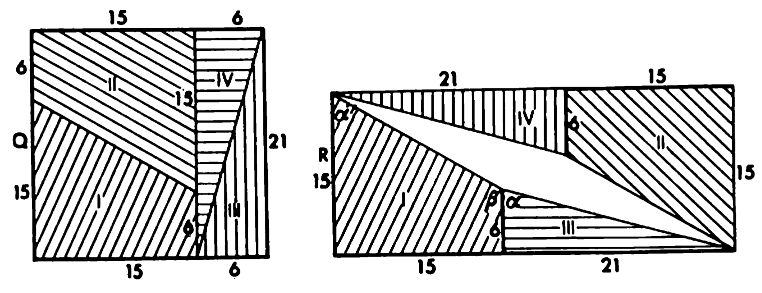

15
6
6
II
15
IV
Q
21
15
I
III
6
15
6
21
15
IV
6
II
R
15
15
I
β
α
6
III
15
21

Fig. 15

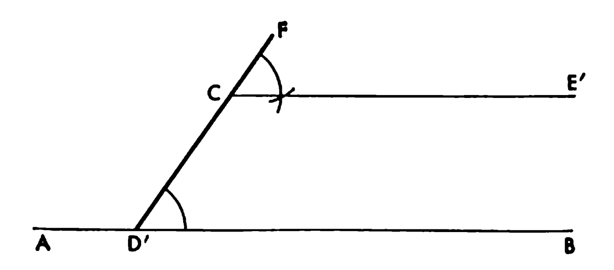

F
C
E′
A
D′
B

Fig. 16

que sous la dénomination latine de « ignoratio elenchi », ce qui, dans une traduction libre, veut dire l' « incompréhension de ce qu'on a démontré ». En effet, à quoi aboutit-on par les raisonnements illustrés à la fig. 2 ? On a seulement démontré qu'en construisant une droite parallèle par ce procédé (au moyen de deux perpendiculaires), on n'obtient qu'une seule droite. Mais le procédé lui-même, est-il unique ? Evidemment non ! On connaît d'autres façons d'arriver au même but. C'est ainsi, par exemple, qu'au lieu du pied D de la perpendiculaire CD (cf. fig. 2) on aurait pu choisir n'importe quel autre point D' (fig. 16) de la droite AB, le réunir au point C de la droite $D'F$ et de construire à partir du rayon CF l'angle FCE' de sommet C égal à l'angle $CD'B$ (et ceci de sorte que les rayons CE' et $D'B$ se trouvent du même côté de FD'). En vertu du théorème (démontré avant l'axiome) sur le parallélisme des droites, les angles correspondants étant égaux, on peut dire que la droite CE' est parallèle à AB. Mais où est la garantie que les droites CE (fig. 2) et CE' (fig. 16) coïncident ? Affirmer que tous les procédés de construction aboutissent toujours à la même droite *), c'est admettre sans démonstration l'hypothèse à démontrer.

● EXEMPLE 3. Précisons nos hypothèses : quelles que soient les droites parallèles et la sécante, la somme de tout couple d'angles intérieurs pris du même côté de la sécante est toujours soit supérieure à 2 droits, soit inférieure à 2 droits, soit égale à 2 droits. Mais l'énumération de ces cas n'est exhaustive qu'à première vue : on a omis le cas où cette somme est tantôt supérieure, tantôt inférieure et tantôt, peut-être, égale à 2 droits, supposition n'entraînant d'ailleurs aucune contradiction. Par exemple, les inégalités $\hat{1} + \hat{4} > 2$ droits et $\hat{2} + \hat{3} < 2$ droits (cf. fig. 3) ne contredisent pas l'égalité $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 4$ droits.

*) Dans la géométrie de Lobatchevski les droites CE et CE' ne coïncident pas par hypothèse.

Remarquons que sans même entrer dans les détails de la démonstration on peut s'apercevoir de son peu de fondement d'après un trait superficiel : cette démonstration n'utilise d'aucune façon le parallélisme des droites AB et CD. Si la démonstration était correcte, on aurait démontré le théorème suivant : « deux droites quelconques coupées par une troisième forment des angles intérieurs du même côté de la sécante dont la somme est égale à 2 droits », ce qui est notoirement faux. Or, si, au contraire, on ne prend pas en considération le parallélisme des droites AB et CD, on verra alors, en règle générale, se réaliser le quatrième cas, omis dans la démonstration réfutée, à savoir : la somme des angles d'un côté de la sécante sera supérieure et, de l'autre, inférieure à 2 droits.

● EXEMPLE 4. Il est généralement admis que la somme des angles d'un triangle est constante (et égale à 2 dr) pour tous les triangles indépendamment de leurs formes et dimensions : c'est pourquoi la proposition « désignons par x la somme des angles d'un triangle (quelconque) » ne soulève pas d'objections. Mais au moment de la démonstration du théorème proposé nous n'avons aucune idée sur la somme des angles du triangle, il n'y a pas donc de raison de la supposer identique pour tous les triangles. Nous pourrions évidemment considérer la somme comme constante sans le démontrer et dans ce cas les raisonnements utilisés serviraient en effet à démontrer que cette somme est égale à 2 droits. Mais cela n'aboutirait qu'à introduire au lieu du postulat des parallèles un autre postulat sans d'ailleurs en tirer un avantage quelconque.

● EXEMPLE 5. L'histoire des mathématiques connaît plusieurs cas où une même erreur était commise : on admettait sans aucune raison que parmi les nombres d'un ensemble infini donné il existe un nombre qui est le plus grand de tous les autres (ou, dans d'autres cas, le plus petit). D'ailleurs, il ne viendrait à l'esprit de personne de chercher ce plus grand

nombre dans la série des nombres naturels 1, 2, 3, . . . L'absence de ce nombre est d'ailleurs expliquée par la constante croissance des nombres de cette série infinie. Or, la série de fractions dont le dénominateur est d'une unité supérieur au numérateur

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

peut aussi être prolongée de façon illimitée, en additionnant chaque fois une unité au numérateur et au dénominateur et, comme dans le premier cas, les nombres tout en augmentant ne permettent pas d'y distinguer le plus grand. D'ailleurs, il n'existe pas de plus grande fraction propre.

L'exemple géométrique suivant s'apparente davantage à celui que nous avons donné: l'angle intérieur d'un polygone régulier *) égal à $\frac{2\,dr\,(n-2)}{n}$, où n est le nombre de côtés, est toujours inférieur à 2 droits, mais il n'existe pas de polygone régulier dont l'angle intérieur soit maximal.

La proposition que parmi les triangles dont on ne sait que la somme de leurs angles ne dépasse pas 2 droits, il en existe un dont la somme des angles est maximale, constitue justement le point faible de la démonstration donnée. C'est une proposition indémontrée qu'on pourrait prendre pour nouvel axiome au lieu du postulat des parallèles.

En généralisant les résultats obtenus après l'analyse des exemples 4 et 5 on aboutit à la conclusion suivante: on peut démontrer que la somme des angles d'un triangle vaut 2 droits et rendre ainsi inutile le postulat des parallèles en admettant sans démonstration l'une des propositions suivantes: 1) la somme des angles de tous les triangles est invariable; 2) il existe un triangle (ne serait-ce qu'un seul) dont la somme des angles est maximale.

---

*) On appelle ainsi les polygones dont tous les côtés et tous les angles sont égaux.

● EXEMPLE 6. On n'a pas examiné tous les cas possibles (pour ces deux derniers mots voir la note à la page 197, notamment, on n'a pas envisagé le cas, où l'une des perpendiculaires NP et NQ est abaissée sur le côté du triangle ABC et l'autre sur son prolongement (fig. 17, où pour le moment on négligera la circonférence tracée en pointillé). Dans ce cas un des angles adjacents à la base AB du triangle ABC sera égal à la différence de deux angles, tandis que l'autre est supplémentaire pour la somme de ces mêmes angles — or, on ne peut bien sûr en tirer aucune conclusion concernant les angles adjacents à la base et donc l'égalité des côtés latéraux. Il suffit d'établir cette lacune dans la démonstration pour la réfuter. Si, de plus, le triangle donné n'est pas isocèle, alors on peut affirmer (en raisonnant par l'absurde) que tous les cas étudiés (fig. 5, 6, 7) sont impossibles, et que le seul cas possible (fig. 17) est négligé *).

D'ailleurs, nous allons démontrer de façon directe que dans un triangle non isocèle la disposition des parties de la figure est telle qu'elle est représentée à la fig. 17. En effet, soit $CA > CB$. Circonscrivons un cercle au triangle ABC; en vertu de la propriété des angles inscrits, la bissectrice de l'angle C doit passer par le milieu N de l'arc AB intercepté par cet angle. Mais l'axe de symétrie de la corde AB doit également passer par ce même milieu N. Ainsi, le point d'intersection de l'axe de symétrie et de la bissectrice se trouve sur le cercle circonscrit, c.-à-d. notoirement en dehors du triangle ABC. Selon la forme des angles NAC

---

*) A première vue il paraît qu'on a, de même, négligé les cas, où le point N est situé à l'intérieur du triangle ou sur la base de celui-ci et les points P et Q se trouvent de part et d'autre de AB (il va de soi qu'il n'y a rien d'impossible dans ce que le pied de la perpendiculaire abaissé d'un point intérieur au triangle sur l'un de ses côtés se trouve sur le prolongement de ce côté — il suffit d'imaginer un triangle obtusangle). Toutefois, dans ce qui suit nous allons établir que le point d'intersection de l'axe de symétrie avec la bissectrice d'un triangle non isocèle se trouve obligatoirement à l'extérieur de celui-ci. Le lecteur qui connaît le théorème « la bissectrice de l'angle d'un triangle divise le côté opposé en parties proportionnelles aux deux autres côtés » peut essayer d'établir cette propriété du point d'intersection en faisant appel à un autre procédé.

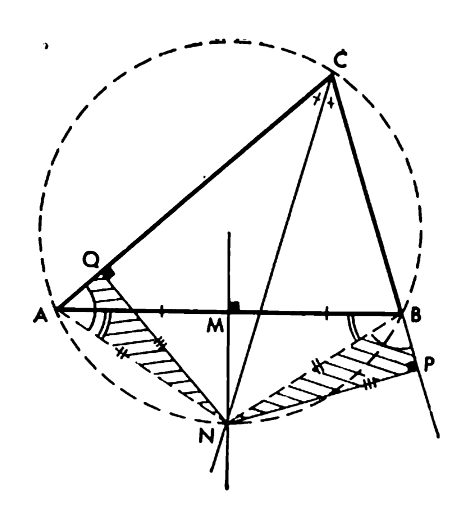


Fig. 17

et NBC (aigus ou obtus) les pieds des perpendiculaires abaissées du point N sur CB et CA se trouveront sur ces côtés ou sur leurs prolongements. Au lieu de ces angles inscrits prenons maintenant les arcs qu'ils interceptent. Puisqu'on a supposé $CA > CB$, on a $\overset{\frown}{CA} > \overset{\frown}{CB}$, d'où, vu que $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}$, il découle $\overset{\frown}{CAN} > \overset{\frown}{CBN}$. Cela signifie que l'arc CAN est plus grand et l'arc CBN plus petit que la demi-circonférence, par conséquent, l'angle CBN est obtus et l'angle CAN aigu. Donc, le pied de la perpendiculaire NP se trouve sur le prolongement du côté CB, et le pied de NQ sur le côté même AC.

● EXEMPLE 7. A première vue, la démonstration paraît convaincante, on croirait même que tous les cas essentiellement différents *) ont été examinés (le point N se trouve au-dessus, au-dessous et sur la droite AB). Cependant, dans

*) Deux cas sont essentiellement différents si la démonstration valable pour l'un d'eux ne peut textuellement être appliquée à l'autre.

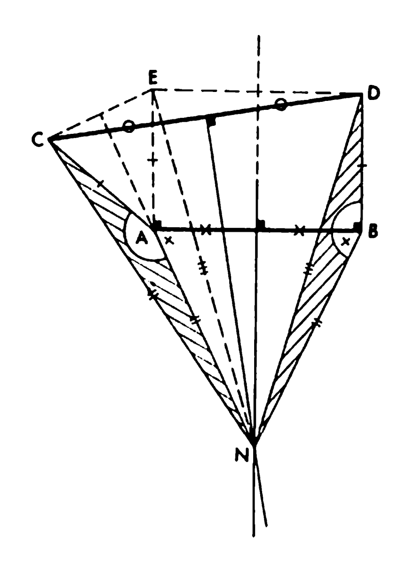


Fig. 18

l'exemple donné la démonstration ne dépend pas seulement de la position du point *N*. Il faut noter que dans le cas 3 la somme de l'angle droit *ABD* et de l'angle aigu *ABN* vaut toujours l'angle obtus *DBN* ; or, pour l'angle obtus *CAB* on peut admettre qu'une fois sommé à l'angle aigu *NAB* il donne de nouveau un angle obtus (cf. fig. 9), mais il peut également donner un angle « surobtus » (c.-à-d. plus que 180°, fig. 18) et cela modifie complètement le problème.

Le cas 3 se présente donc sous deux aspects différents : l'angle obtus *CAB* et le triangle *CAN* se trouvent 1) d'un côté (cf. fig. 9) de la droite *AC*, 2) de part et d'autre de cette droite (fig. 18, où on ne tiendra pas compte pour le moment des lignes en pointillé). Le premier de ces deux cas, où l'angle *CAB* fait partie de l'angle *CAN*, nous a déjà donné que l'angle *DBA* était égal à l'angle *CAB*. Mais le deuxième cas ne nous amène pas à cette conclusion :

l'angle droit DBA représente toujours la *différence* de deux angles (DBN et ABN), quant à l'angle obtus CAB il complète (jusqu'à 4 droits) la *somme* de deux angles pareils (CAN et BAN). En raisonnant par l'absurde, on conclut que ce deuxième cas est le seul possible.

Pour rendre la figure plus explicite faisons quelques constructions supplémentaires. Du point A élevons une perpendiculaire à AB (maintenant les lignes en pointillé de la fig. 18 entrent en jeu) et portons sur celle-ci un segment AE dont la grandeur et la direction coïncident avec celles du segment BD ; il est évident qu'on a également $AE = AC$. Joignons le point E aux points D, N et C ; comme $ABDE$ est un rectangle, l'axe de symétrie du segment AB l'est aussi pour le segment ED, par conséquent, $NE = ND$, d'où il s'ensuit que $NE = NC$. Les points A et N sont donc équidistants des extrémités du segment CE, et, par conséquent, la droite AN est l'axe de symétrie de ce segment. Après symétrie par rapport au segment AB le triangle DBN se transforme en triangle EAN (d'orientation opposée *)), sa symétrie par rapport à la droite AN donne le triangle CAN (de même orientation que le triangle DBN). Le triangle CAN s'obtient donc à partir du triangle DBN par une simple rotation de ce dernier autour du sommet N de l'angle BNA ($=EAC$, c.-à-d. égal à la différence des angles initiaux obtus et droit).

● EXEMPLE 8. On commence par s'assurer de la fausseté du théorème. Il suffit pour cela de choisir un « exemple contradictoire », c.-à-d. de trouver un cas où les hypothèses du théorème sont vérifiées et la conclusion ne l'est pas. Un tel exemple peut être obtenu si l'on partage un triangle isocèle quelconque LMN ($LN = MN$, fig. 19) en deux par un segment de droite NP issu du sommet mais d i f f é r e n t de la médiane. Les triangles LNP et MNP ainsi

*) Le lecteur ignorant ce qu'est la notion d'« orientation d'un triangle » peut tout simplement négliger la phrase entre parenthèses.

obtenus (la correspondance s'établit par l'ordre du parcours des sommets) ont un côté commun NP, de plus, $LN = MN$ et $\hat{L} = \hat{M}$, donc, les hypothèses du théorème sont vérifiées mais les triangles ne sont certainement pas égaux (ne fût-ce que pour la seule raison que $LP \neq MP$).

Toutefois, même sans savoir si le théorème est juste ou faux on pourrait relever une lacune dans la démonstration, à savoir (on revient aux désignations des fig. 10 à 12) qu'on a négligé les cas où la droite CC_2 passe par l'une des extrémités (A ou B) du segment AB, autrement dit, que les côtés CA et C_2A ou CB et C_2B constituent mutuellement leur propre prolongement.

Dans le premier de ces deux cas (les deux côtés égaux, AC et AC_2 de la fig. 20, sont situés sur une même droite) la conclusion du théorème est tout de même vérifiée: si l'on applique le triangle $A_1B_1C_1$ au triangle ABC, on obtient le triangle isocèle BCC_2 (en vertu de l'égalité des angles C et C_2), par conséquent,

$$BC = BC_2 = B_1C_1.$$

Ajoutons que cela ne peut avoir lieu que si les triangles sont rectangles (sur la fig. 20, à gauche, les angles au point A sont égaux et supplémentaires) *).

Il en est autrement si sur une même droite se trouvent les côtés (BC et BC_2, fig. 21) dont rien n'est dit dans l'énoncé du théorème. Il est évident que l'on obtient un triangle isocèle ACC_2, mais on ne peut rien affirmer sur la nature des côtés CB et C_2B. Bien plus, il viendra aussitôt à l'esprit du lecteur le triangle isocèle (cf. fig. 19) partagé en deux parties inégales et il conclura que dans ce cas les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ ne sont pas, à proprement parler, égaux

*) Remarquons qu'il faut aussi prévoir une telle possibilité (les sommets C, A, C_1 appartiennent à une même droite) lors de la démonstration habituelle de l'égalité des triangles ayant les trois côtés respectivement égaux. Pour ces suppositions la démonstration en est également menée à bien et, de même, on arrive à la conclusion que dans ce cas les triangles égaux doivent être rectangles.

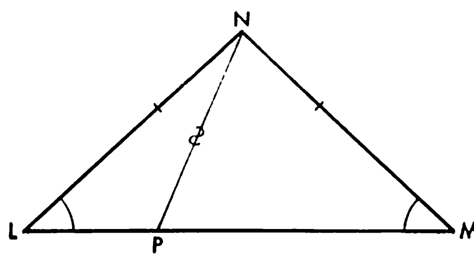


Fig. 19

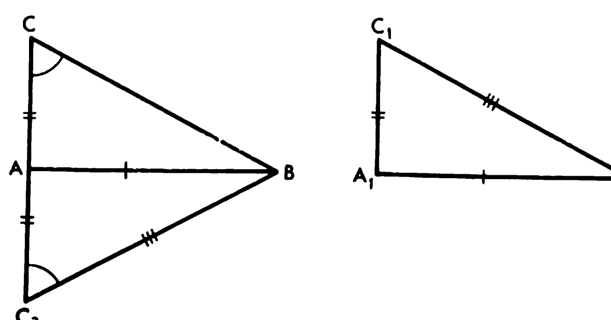


Fig. 20

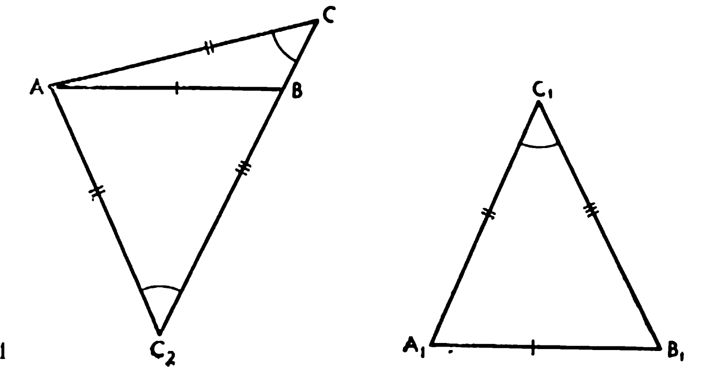


Fig. 21

15—036

(à moins que les angles aux sommets B et B_1 soient droits, alors on obtiendrait de nouveau une égalité).

● REMARQUE 1. Les raisonnements précédents nous suggèrent des corrections à apporter au théorème, autrement dit, à le remplacer par d'autres théorèmes du même genre mais cette fois justes. Nous donnerons ci-dessous deux exemples de telle « correction ».

a) *Si entre les éléments de deux triangles il existe une relation telle que deux côtés quelconques et l'angle opposé à l'un d'eux dans l'un des triangles sont égaux aux éléments homologues dans l'autre, alors les angles opposés à deux autres côtés égaux* (sur les fig. 10 à 12 et 20 à 21 ces angles sont marqués par B et B_1) *sont soit égaux* (dans ce cas les triangles sont égaux, fig. 10 à 12 et 20), *soit leur somme est égale à 2 droits* (fig. 21).

b) *Si entre les éléments de deux triangles il existe une relation telle que deux côtés et l'angle opposé au plus grand d'entre eux dans l'un des triangles sont égaux aux éléments homologues dans l'autre, alors ces triangles sont égaux.*

En effet, nous avons éliminé de cette façon le cas représenté à la fig. 21 : aucun des angles B et B_1 ne peut être obtus (ni même droit), car ils ne sont pas opposés au plus grand côté. Ce théorème est parfois énoncé dans les manuels de géométrie sous la dénomination de « quatrième cas d'égalité des triangles ».

● REMARQUE 2. Le fait suivant peut sembler, à première vue, étrange : le cas d'égalité des triangles peut être assimilé, à certain égard, « de façon aussi proche que l'on veut » au cas de leur inégalité. Ainsi, par exemple, si l'on compare la fig. 10 avec la fig. 21, on voit que le point B, sur la fig. 10, pourrait être situé aussi près que l'on veut de la droite CC_2 ; le triangle CBC_2 aussi « étiré » qu'il soit est toujours isocèle et la démonstration de l'égalité des triangles reste juste. Mais dès que le point B atteint la droite CC_2 (fig. 21), l'égalité des segments CB et C_2B,

comme celle des triangles, n'est plus obligatoire. Nous donnerons ci-dessous quelques explications permettant d'éclaircir la question.

Il est parfois utile de considérer les trois points P, Q, R situés sur une même droite en tant que sommets d'un « triangle dégénéré »; si, de plus, le point Q se trouve entre les points P et R, les angles de ce « triangle » seront $P = 0$, $R = 0$, $Q = 2$ droits. La signification de cette terminologie est claire: tant que les points se trouvent « presque » sur une même droite, ils définissent quand même un triangle, dont deux des angles sont « très petits », et le troisième est « proche » d'un angle plat (2 dr). Lors de la déformation continue de cette figure les trois points peuvent tomber exactement sur une même droite, et dans ce cas il est utile de conserver les anciennes désignations. Il est à signaler que dans ce cas certains théorèmes restent en vigueur aussi bien pour des triangles « vrais » que pour des triangles « dégénérés »; c'est le cas, par exemple, pour le théorème: la somme des angles d'un triangle est égale à 2 droits. D'autres, par contre, perdent leur signification pour des triangles « dégénérés ». Donnons un exemple: un triangle à deux angles égaux est isocèle. Ce théorème n'est vrai que pour des angles égaux non nuls; pour un triangle dégénéré PQR, dont on a parlé plus haut, des égalités $\hat{P} = \hat{R} = 0$ il ne découle pas du tout que $PQ = QR$, c.-à-d. que le point Q est le milieu du segment PR, il peut occuper n'importe quelle position sur ce segment. Cet exemple est en rapport direct avec le problème qui nous intéresse. Tant que le point B de la fig. 10 ou de la fig. 11 n'appartient pas à la droite CC_2, si petits que soient les angles adjacents au côté CC_2 du triangle BCC_2, de l'égalité de ces angles il s'ensuit que $CB = C_2B$. Mais dès que le triangle BCC_2 dégénère (cf. fig. 21), les deux angles considérés s'annulent et le théorème n'a plus de valeur.

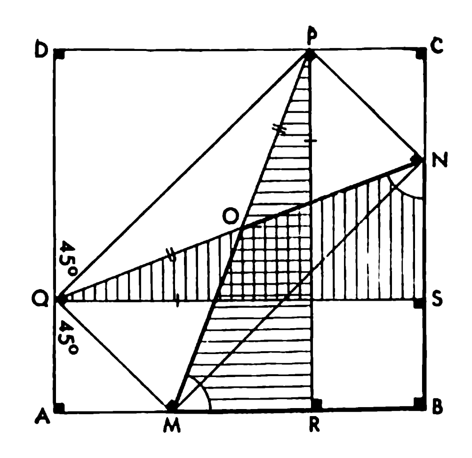


Fig. 22

● EXEMPLE 9. L'assertion du théorème est fausse, car il est facile de construire un rectangle inscrit dans un carré et dont les côtés ne sont pas égaux. Il suffit de tracer les côtés du rectangle parallèlement aux diagonales du carré (mais de façon qu'ils ne partagent pas les côtés du carré en deux parties égales). Pour plus de détails voir fig. 22: à partir de deux sommets opposés du carré, A et C par exemple, on porte le long de ses côtés quatre segments égaux $AM = AQ = CN = CP$ de longueur quelconque $\neq \frac{a}{2}$, a étant la longueur d'un côté du carré, les segments restants des côtés seront de même égaux: $MB = BN = PD = DQ \neq \frac{a}{2}$. En joignant successivement les points M, N, P, Q, M, on obtient quatre triangles rectangles isocèles égaux deux à deux: $\triangle AMQ \equiv \triangle CPN$, $\triangle BNM \equiv \triangle DQP$. Donc, $QM = PN$, $MN = QP$ et le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme, plus précisément, un

rectangle, vu que, par exemple, $\widehat{MQP} = 180° - 45° - - 45° = 90°$ (remarquons en même temps que les côtés du quadrilatère $MNPQ$, qui sont inclinés par rapport aux côtés du carré d'un angle de 45°, doivent être parallèles aux diagonales du carré, d'où une nouvelle démonstration du fait que $MNPQ$ est un rectangle).

Indépendamment de la construction exposée on pourrait reconnaître le défaut logique suivant dans la démonstration de la page 208: ce n'est que sur la base de la fig. 13, dont le choix est fortuit, qu'on a abouti à la conclusion que l'une (R) des deux projections (du point P sur AB et du point Q sur BC) se trouve sur un côté du quadrilatère $MBNO$ et l'autre (S) sur le prolongement de l'un de ses côtés; en d'autres termes, que l'un des deux angles égaux OMR et ONS est intérieur et l'autre extérieur au quadrilatère $MBNO$. Cette disposition des points et des angles n'a pu être prévue et expliquée: en effet, la fig. 22, où ces deux angles sont intérieurs, répond parfaitement aux hypothèses du théorème.

En résumé, nous donnons quelques énoncés du théorème corrigé:

1) *si un rectangle inscrit dans un carré n'a aucun de ses côtés parallèle aux diagonales du carré, ce rectangle est un carré*; ou

2) *si un rectangle, dont les côtés ne sont pas égaux, est inscrit dans un carré, les côtés de ce rectangle sont parallèles aux diagonales du carré.*

● EXEMPLE 10. L'erreur logique de démonstration est identique à celle de l'exemple 2: « l'incompréhension de ce qui a été démontré »; autrement dit, la substitution à la proposition à démontrer d'une autre proposition qui, tout en étant démontrée, n'entraîne aucunement ce qu'on veut démontrer. Tâchons de suivre la marche des raisonnements produits, mais en remplaçant, pour mieux déceler l'erreur, la fig. 14 par la fig. 23, où

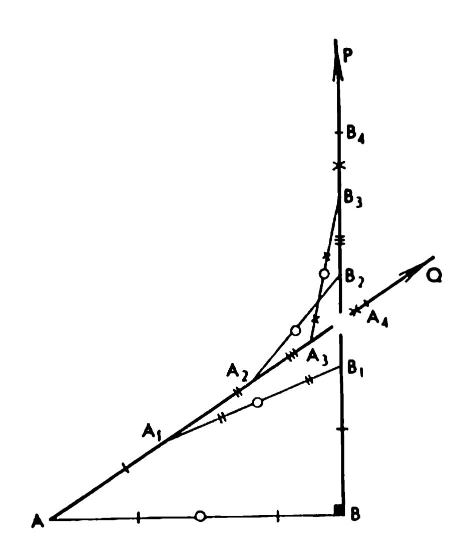


Fig. 23

les rayons AQ et BP se coupent (pour éviter l'accusation que le dessin prédétermine la solution du problème d'existence du point d'intersection, les rayons AQ et BP sont tracés avec de petites ruptures). Appelant pour abréger AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... respectivement premier, deuxième, troisième, ... segments de l'oblique, et BB_1, B_1B_2, B_2B_3, ... premier, deuxième, troisième, ... segments de la perpendiculaire, on peut considérer comme démontré 1) que ces segments peuvent être reportés de façon indéfinie de sorte que le numéro du segment peut être de l'ordre aussi grand que l'on veut; 2) que les segments de même numéro ne se recoupent pas, c.-à-d. qu'il n'existe pas de point commun entre les premiers segments de la perpendiculaire et de l'oblique, de même qu'entre les deuxièmes, ... entre les centièmes, etc. Mais pourquoi ne peuvent pas se couper les segments de numéros différents, le 20ième segment par exemple de la perpendiculaire avec

le 25ième de l'oblique? Or, en affirmant que la perpendiculaire et l'oblique ne se coupent en aucun point, on devrait démontrer qu'a u c u n des segments de la perpendiculaire n'a de point commun avec a u c u n segment de l'oblique. On ne peut donc se satisfaire de la démonstration qu'aucun des segments de la perpendiculaire ne coupe le segment de même numéro de l'oblique. En revenant à la fig. 23 (où les notations de la fig. 14 sont conservées; les deux dessins étant tracés sans altérations préméditées), on peut constater aisément, « au jugé » bien sûr, que le 2ième segment de la perpendiculaire a un point commun avec le 4ième segment de l'oblique *). Le contraste entre le caractère élémentaire de l'erreur et la difficulté de la déceler rend ce sophisme particulièrement intéressant.

● REMARQUE. Comme nous l'avons dit plus haut (voir la note à la page 210), dans cet exemple on n'a fait qu'emprunter l'idée du sophisme énoncé par Proclus. Ce dernier considère deux droites quelconques (de fait, deux rayons n'appartenant pas à une même droite et issus de points différents) et démontre en portant des segments de façon indéfinie, comme il est décrit plus haut, que ces droites ne se coupent pas. Proclus définit de façon correcte l'erreur logique commise dans ce raisonnement sophistique, en signalant qu'avec ce procédé on ne démontre que l'impossibilité d'approcher le point d'intersection, mais que cela ne signifie pas qu'un tel point n'existe pas. Cependant, à en juger par l'exposé de Bonola, on ne peut être certain que Proclus est allé plus au fond dans la nature géométrique de cette erreur; en tout cas l'auteur italien, dont l'époque est moins reculée, tombe visiblement dans l'erreur en prétendant que l'inaccessibilité du point d'intersection a le même caractère que dans le célèbre sophisme d'« Achille et de la tortue ». Par cette juxtaposition Bonola veut dire, évidemment, que le point d'intersection (désignons-le par K) des rayons AQ et BP n'est pas accessible par ce procédé du fait que pour n croissant indéfiniment les points A_n et B_n tendent vers le point K comme vers leur limite, sans pouvoir jamais l'atteindre. Dans notre version cette hypothèse est inadmissible, car l'égalité $AA_n = BB_n$, vérifiée pour tout n, entraînerait $AK = BK$, c.-à-d. que l'hypoténuse est égale au côté de l'angle droit. Mais elle est également inadmissible pour la version de Proclus-Bonola, sauf dans le cas parti-

*) Si l'on connaissait l'angle A, on pourrait calculer les numéros des segments qui se coupent à l'aide des procédés trigonométriques.

culier du triangle AKB isocèle. Donc, dans ce cas aussi il s'agit, en somme, de l'intersection de segments aux numéros différents et non pas de la tendance des extrémités de segments de même numéro vers une limite commune.

● CONCLUSIONS. Une question se pose tout naturellement : si les erreurs dans les raisonnements mathématiques sont parfois à tel point dissimulées que seule une analyse minutieuse permet de les déceler, peut-on réellement considérer les mathématiques suivant l'habitude prise comme un fondement sûr des sciences exactes (physique, technique, etc.) ?

Il va de soi qu'aucune méthode scientifique ne peut nous garantir des erreurs, il faut, de plus, savoir s'en servir. Il convient donc d'étudier les sources d'erreurs éventuelles et d'être plus exigeant dans le choix des arguments logiques. Et pour se faire une idée du danger de tomber dans l'erreur, qui peut passer inaperçue, il faut s'adresser à l'histoire des mathématiques.

Bien que l'histoire connaisse des œuvres mathématiques entachées d'erreurs, ces dernières n'ont jamais pu arrêter la progression de la science et par la suite ont été corrigées. L'histoire des tentatives multiséculaires de démontrer le postulat des parallèles en est un exemple frappant. Lobatchevski a écrit en 1823 à propos de ce postulat : « On n'a pas trouvé jusqu'à présent de démonstration rigoureuse de cette vérité. Celles qui ont été données ne sont que des explications et ne méritent pas le titre de véritables démonstrations mathématiques ». Il en a eu la pleine conviction quelques années avant sa remarquable découverte qui marque l'étape suivante dans l'histoire de la géométrie. Ces nouvelles idées ont d'abord permis à Lobatchevski, puis au monde mathématique tout entier, de comprendre l'inconsistance des tentatives de démonstration du postulat des parallèles les plus ingénieuses.

Le lecteur trouvera d'autres illustrations de ces conclusions dans les chapitres III et IV.

III. ERREURS DANS LES RAISONNEMENTS EN LIAISON AVEC LA NOTION DE LIMITE

Les exemples suivants ne sont à la portée que des élèves des classes terminales: longueur de la circonférence, notion de limite, trigonométrie et, même dans un cas, éléments de géométrie de l'espace sont des notions qui doivent être connues.

● EXEMPLE 11. *Toutes les circonférences ont une même longueur.*

C'est un ancien sophisme attribué au philosophe grec Aristote (IVe s. avant notre ère) qu'on appelle, pour des raisons que nous donnerons ci-dessous, « roue d'Aristote ».

Souvenons-nous de problèmes d'arithmétique où d'après la longueur de la circonférence d'une roue (qu'on désigne simplement par le terme « circonférence ») de voiture roulant sur une route, il fallait déterminer le chemin parcouru ou vice versa. La solution du problème était fondée sur le fait apparemment évident qu'au cours d'un tour complet de la roue celle-ci parcourt un chemin égal à la longueur de la circonférence; ainsi, par exemple, une roue de 2 mètres de « circonférence » après 30 révolutions parcourt un chemin égal à 60 mètres. Il faut noter que si le mouvement s'effectue en ligne droite et la précision exigée n'est pas trop élevée, ces calculs sont confirmés par l'expérience. La circonférence de la roue peut être mesurée au moyen d'un lacet, tandis qu'un rayon marqué de la roue permet de juger de sa révolution complète. On peut également fixer sur la jante une applique laissant des traces sur la route (toutes les voitures sont munies de comptes-tours qui indiquent le chemin parcouru ou, s'ils sont couplés à un mécanisme d'horlogerie, la vitesse). Il va de soi que ces calculs sont pratiquement justes à condition que la roue roule de façon « normale », sans

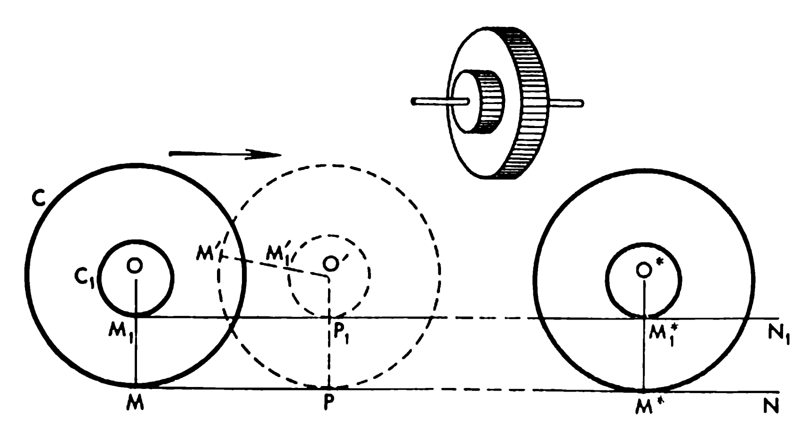


Fig. 24

« soubresauts » ni « patinage »; en mécanique on parle alors d'« une roue qui roule sans glisser ».

Revenons maintenant au sophisme analysé. Considérons deux circonférences concentriques C et C_1 de rayons différents fixées l'une à l'autre (fig. 24). Imaginons, de même, un modèle physique: deux cylindres sont montés sur un arbre commun, disons horizontal, et sont fixés à demeure l'un à l'autre (ou mieux encore: l'un de deux cylindres est façonné en forme d'un nouveau cylindre monté sur le même axe mais de rayon plus petit; voir le dessin sur la fig. 24). Aux circonférences C et C_1 on mène respectivement aux points M et M_1 appartenant au même rayon OM les tangentes MN et M_1N_1. Comme les circonférences sont fixées l'une à l'autre, elles se déplacent comme un seul ensemble: toutes les deux subissent des rotations d'un même angle. Ainsi, si la circonférence C roule sur la droite MN, la circonférence C_1 se déplace suivant la droite M_1N_1 (la flèche sur la fig. 24 indique le sens du roulement des circonférences

fixées ensemble; l'une des positions intermédiaires est marquée en pointillé, M' et M'_1 étant les nouvelles positions de points M et M_1). Dans le cas d'un modèle physique, le mouvement peut être interprété de façon suivante: chaque cylindre est placé sur un rail horizontal; quand le grand cylindre roule sur son rail, il provoque la rotation du petit cylindre sur son propre rail. Supposons que la circonférence C, en roulant suivant la droite MN, fasse un tour complet de sorte que le point M se retrouve dans la position M^*. En même temps la circonférence C_1 effectue elle aussi un tour complet et le point M_1 vient occuper la position M_1^* sur le rayon O^*M^* parallèle à OM (ces deux rayons étant perpendiculaires à MN). D'où il s'ensuit que

$$MM^* = M_1M_1^*,$$

c.-à-d. durant un tour complet les deux circonférences mobiles ont parcouru le même chemin, donc, elles ont la même longueur. Et comme les circonférences C et C_1 ont été choisies de façon absolument arbitraire, on a ainsi démontré ce qu'il fallait.

● INDICATION. Sans prédire comment le lecteur se tirera d'embarras provoqué par cette contradiction évidente (les raisonnements s'y rapportant seront cités dans le chapitre IV), on fournira un complément d'explication qui peut s'avérer utile dans tous les cas.

On considère souvent une circonférence comme la limite d'une suite de polygones réguliers inscrits (ou circonscrits) lorsque le nombre de leurs côtés croît indéfiniment *).

*) Ici on a sciemment utilisé le terme « limite » (au lieu de « position limite », terme largement répandu) auquel on attribue un sens bien déterminé: quelque étroit que soit un anneau limité par deux circonférences concentriques à une circonférence donnée et dont les rayons sont choisis de façon que l'un soit plus grand et l'autre plus petit que celui de la circonférence considérée (l'anneau peut, par exemple, être compris entre les circonférences de rayons $R - \varepsilon$ et $R + \varepsilon$, R étant le rayon de la circonférence donnée), il existe un nombre n tel que tous les polygones réguliers inscrits (circonscrits) de n côtés (ou à un nombre plus grand de côtés) seront entièrement contenus à l'intérieur de cet anneau, étant enveloppants par rapport au bord intérieur et

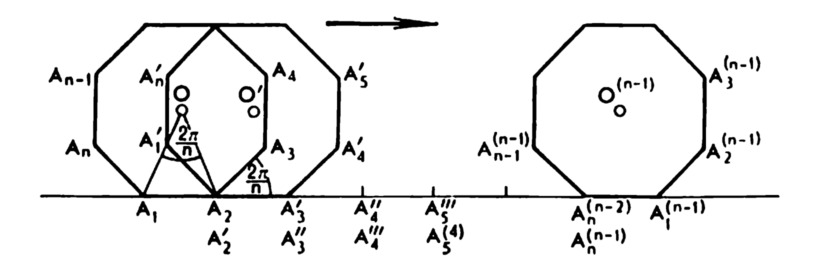


Fig. 25

Cela suggère l'idée d'utiliser (pour mieux comprendre le processus de roulement d'une circonférence) un polygone régulier; plus le nombre de ses côtés est grand, plus est précise l'image du roulement d'une circonférence.

La phrase « un polygone (convexe) roule (sans glisser) sur une droite » est parfaitement claire: on établit un ordre fixe de parcours des sommets (et des côtés) du polygone, disons dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, et on suppose que dans la position initiale l'un des côtés du polygone se confond avec la droite. On commence ensuite à faire pivoter le polygone autour d'un sommet commun au côté coïncidant avec la droite d'appui et au côté suivant jusqu'à ce que ce dernier ne se trouve sur la droite, puis

enveloppés par rapport au bord extérieur de l'anneau. Il ne faut pas confondre cette situation avec la proposition (plutôt une définition) bien connue: « la longueur du cercle est la limite vers laquelle tend la suite des longueurs de périmètres des polygones inscrits (circonscrits) réguliers lorsque... ». Comme nous allons le voir ci-dessous (cf. les exemples 12 à 14) le terme « limite » a dans les deux cas un sens bien différent.

on fait pivoter le polygone autour du sommet suivant et ainsi de suite. Bref, le polygone se déplace en s'appuyant successivement sur chacun de ses côtés, en pivotant autour du sommet commun à deux de ses côtés, le long de la droite dans un sens déterminé.

Examinons un polygone régulier de n côtés (fig. 25, où $n = 8$). Désignons ses sommets par A_1, A_2, . . ., A_{n-1}, A_n. Supposons de plus que le côté A_1A_2 coïncide, dans la position initiale, avec la droite sur laquelle roule le polygone dans la direction A_1A_2 (flèche sur la fig. 25). L'angle extérieur du polygone (ainsi que son angle au centre) est égal à $\frac{2\pi}{n}$ radians $\left(\frac{4}{n}\text{ dr ou }\frac{360°}{n}\text{ pour d'autres unités de mesure}\right)$; donc il suffit de faire pivoter le polygone autour du sommet A_2 d'un angle $\frac{2\pi}{n}$ pour que le côté A_2A_3 coïncide avec la droite. Ceci fait, le centre O du polygone occupe la position O' et les sommets A_1, A_2, A_3, . . ., A_n respectivement les positions A'_1, A'_2 (cette dernière se confond avec A_2), A'_3, . . ., A'_n. Si l'on fait pivoter maintenant le polygone autour du sommet A'_3 d'un angle de $\frac{2\pi}{n}$, le polygone $A'_1A'_2A'_3$ . . . A'_n occupera la position $A''_1A''_2A''_3$ . . . A''_n (sur la fig. 25 on n'a représenté que les sommets : A''_3 coïncidant avec A'_3 et A''_4 situé sur la droite). Après $(n - 1)$-ième rotation le polygone occupera la position $A_1^{(n-1)}A_2^{(n-1)}$ . . . . . . $A_n^{(n-1)}$, pour laquelle son centre coïncidera avec le point $O^{(n-1)}$ et le côté $A_n^{(n-1)}A_1^{(n-1)}$ se confondera avec la droite ; comme le sommet A_1 est revenu sur la droite on peut s'arrêter là ; on comprend aisément que le segment $A_1A_1^{(n-1)}$ est égal au périmètre du polygone.

Le lecteur a certainement déjà compris que la position de chaque sommet est marquée par deux indices : inférieur désignant le numéro du sommet dans sa position initiale et supérieur (les accents d'abord, puis leur nombre entre

parenthèses) permettant de juger du nombre de tours effectués; ainsi, par exemple, par le symbole $A_6^{(4)}$ on marque la position du sommet A_6 après la 4ième révolution. La fig. 25 permet de distinguer les propriétés essentielles du mouvement ainsi que certaines autres propriétés fortuites liées à la valeur choisie de n; il est donc utile de faire un dessin analogue pour un nombre impair de côtés, disons pour $n = 5$.

En reprenant maintenant l'examen de notre sophisme, prenons au lieu de deux circonférences concentriques deux polygones concentriques réguliers de n côtés respectivement parallèles, autrement dit, deux polygones réguliers qui s'obtiennent l'un de l'autre par homothétie par rapport au centre qui coïncide avec celui du deuxième polygone. En considérant ces polygones liés l'un à l'autre faisons rouler le plus grand des polygones sur une droite de la manière décrite plus haut et essayons de nous représenter le mouvement du plus petit des polygones. Va-t-il se déplacer également en s'appuyant successivement sur chacun de ses côtés? Est-ce que son périmètre s'étalera également suivant une droite comme dans le cas du plus grand des polygones? On peut, d'ailleurs, procéder inversement: en faisant rouler le petit polygone examiner le mouvement du plus grand.

● PROBLÈME. On va maintenant formuler un problème où, ayant en vue d'autres objectifs, on remplace un cercle par un polygone roulant. Ce problème a en commun avec le présent chapitre certaines opérations de passage à la limite nécessitant une argumentation (comp. les exemples ci-dessous).

Comme on le sait, chaque point d'une circonférence, roulant sur une droite, décrit une courbe appelée *cycloïde*. Si l'on suit le mouvement d'un point se trouvant dans la position initiale au bas du cercle roulant, c.-à-d. en coïncidance avec le point de contact (fig. 26, comp. avec fig. 24), la trajectoire de ce point entre deux positions successives M et M^* (cette dernière, comme sur la fig. 24, correspond à la révolution complète du cercle mobile) représentera une « arche de cycloïde » $MM'M^*$. Par des procédés des mathématiques supérieures on a établi que la longueur de cette arche

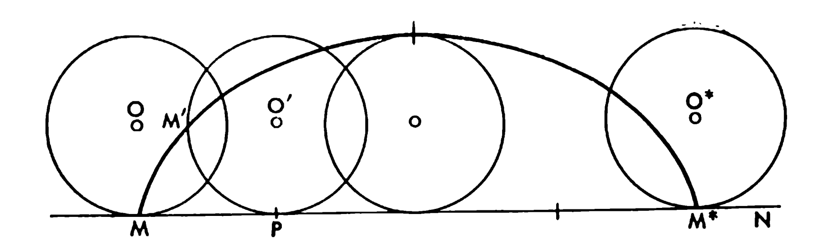


Fig. 26

vaut exactement 8 fois le rayon du cercle roulant, quant à l'aire comprise entre cette arche et la droite MM^* elle est triple de l'aire du cercle. Le problème consiste à obtenir les mêmes résultats par une voie élémentaire. Pour ce faire on remplace le cercle mobile de rayon R par un polygone inscrit de n côtés.

La trajectoire du point A_1, en faisant appel aux désignations de la fig. 25, est constituée d'arcs de cercle (au nombre de $n-1$; ils n'ont pas été représentés sur la fig. 25): $\overset{\frown}{A_1A_1'}$ de centre A_2, $\overset{\frown}{A_1'A_1''}$ de centre A_3', . . ., $\overset{\frown}{A_1^{(n-2)}A_1^{(n-1)}}$ de centre $A_n^{(n-2)}$. Ces arcs de cercle forment, dans leur ensemble, une courbe allant de A_1 à $A_1^{(n-1)}$ qui ressemble à une cycloïde mais en diffère par l'apparition de points de raccordement (aux lieux de rencontre de deux arcs voisins). A mesure qu'on augmente le nombre n, il arrivera un moment où la courbe composée d'arcs de cercle s'approchera de l'arche d'une cycloïde. On peut s'attendre à ce que cette dernière soit une limite pour la première courbe quand $n \to \infty$. Mais en utilisant des procédés de la trigonométrie élémentaire il n'est pas difficile de déterminer pour tout n la longueur de la trajectoire, décrite par un sommet du polygone durant sa révolution complète, comme formée d'arcs de cercle, ainsi que l'aire comprise entre cette trajectoire et la droite $A_1A_1^{(n-1)}$. Si, dans les expressions ainsi obtenues pour la longueur et l'aire, on passe

à la limite pour $n \to \infty$, on obtient respectivement $8R$ et $3\pi R^2$, c.-à-d. les résultats exacts *). Toutefois, les formules exprimant la longueur et l'aire d'une cycloïde ne peuvent être considérées comme bien établies par ces raisonnements qu'une fois *justifié le passage à la limite*, c.-à-d. après avoir démontré que pour $n \to \infty$ la longueur et l'aire obtenues pour un polygone roulant à n côtés ont pour limites la longueur et l'aire recherchées. C'est un objectif qui en restant dans le cadre des mathématiques élémentaires peut être réalisable, mais il est douteux qu'on puisse l'atteindre facilement.

Le problème peut être étendu au cas d'un cercle mobile où on examine également des trajectoires de points intérieurs ou extérieurs solidaires du cercle mobile; on obtient aussi des cycloïdes dites « allongées » et « raccourcies ». On peut également essayer d'étudier ces courbes en remplaçant le cercle roulant par un polygone régulier inscrit et en passant ensuite à la limite.

● EXEMPLE 12. *La longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des longueurs des côtés de l'angle droit.*

Du milieu D de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC (fig. 27; $C = 90°$) abaissons les perpendiculaires DE et DF sur les côtés de l'angle droit; on obtient la ligne

---

*) Ce problème peut être résolu par plusieurs méthodes, dans celle choisie par l'auteur on a recours aux formules du cours de trigonométrie figurant dans le programme de l'enseignement secondaire et aux équations suivantes:

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin k\alpha = \frac{\sin k\frac{\alpha}{2}\cdot\sin(k+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 k\alpha = \frac{2k+1}{4} - \frac{\sin(2k+1)\alpha}{4\sin\alpha},$$

$$2(\sin\alpha\sin 2\alpha + \sin 2\alpha\sin 3\alpha + \ldots + \sin(k-1)\alpha\sin k\alpha) = k\cos\alpha - \frac{\sin 2k\alpha}{2\sin\alpha}$$

(le lecteur pourra facilement vérifier la justesse de ces formules, par exemple, par récurrence de k à $k+1$);

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\omega}{\omega} = 1 \quad (\omega \text{ étant la valeur de l'angle en radians})$$

(on peut trouver cette formule dans plusieurs manuels de trigonométrie).

brisée $BEDFA$ composée de quatre segments dont la longueur est évidemment égale à la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. Reprenons cette même construction pour chacun des triangles DBE et ABF: des milieux des hypoténuses DB et AD on abaisse les perpendiculaires sur les côtés de l'angle droit et on obtient une ligne brisée de même longueur composée de huit segments de droite. On peut poursuivre cette opération indéfiniment: l'hypoténuse sera successivement divisée en 2, 4, 8, 16, . . . parties égales; on obtient donc une suite de lignes brisées en forme de scie (pour plus de simplicité on les appellera en abrégeant « scies ») qui joignent les points A et B et se composent de 2, 4, 8, 16, . . . « dents » (c.-à-d. de 4, 8, 16, 32, ... chaînons). Toutes les « scies » ont la même longueur (autrement dit, la somme des longueurs des chaînons est toujours la même) qui est égale à la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. A mesure que le nombre de dents de la « scie » augmente, celle-ci s'approche de plus en plus de l'hypoténuse AB, de sorte que si ce nombre devient très grand, il sera difficile de distinguer, pratiquement, cette ligne brisée, composée d'un très grand nombre de petits chaînons, du segment rectiligne (de même qu'il est difficile de distinguer un cercle du polygone régulier inscrit dans ce cercle et possédant un très grand nombre de côtés).

Servons-nous de cette image pour mieux formuler le problème: la suite de « scies » a pour limite le segment AB dans le sens que la plus grande des distances des points de la « scie » à la droite tend vers zéro à mesure qu'augmente le numéro d'ordre de la « scie » (en effet, cette distance maximale n'est rien d'autre que la hauteur abaissée sur l'hypoténuse de l'un des triangles rectangles égaux formant les « dents de la scie », et la hauteur de la « dent » est inférieure à son hypoténuse qui tend vers zéro). En d'autres termes, aussi étroite que soit la bande comprise entre l'hypoténuse AB et la sécante aux côtés de l'angle droit et parallèle à AB (fig. 27), il existe dans la suite de « scies » une telle

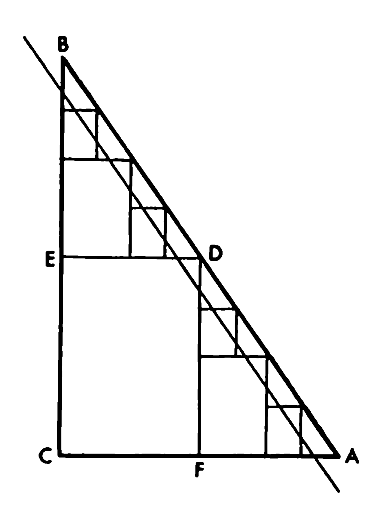


Fig. 27

« scie » qui, le long de toute la distance de A à B, s'insère entièrement avec toutes les « scies » suivantes au sein de cette bande (cf. la note à la page 235). Or, toutes les « scies » ont même longueur, par conséquent, la suite de ces longueurs est formée de nombres égaux et a pour limite le nombre qui est égal à la somme des longueurs des côtés de l'angle droit. D'autre part, une « scie » a pour limite l'hypoténuse dont la longueur est également la limite de la suite des longueurs des « scies », or une suite ne peut avoir deux limites différentes; notre hypothèse est ainsi démontrée.

● REMARQUE 1. Le fait d'avoir choisi le triangle rectangle ABC n'est pas essentiel (son seul avantage est de posséder des appellations distinctes pour ses côtés). Dans un triangle obliquangle cette suite de « scies » est construite en menant par les points de division d'un des côtés des parallèles aux deux autres. La division du côté en 2, 4, 8, . . . parties égales n'est également pas essentielle; on peut le diviser en 2, 3, 4, 5, . . . et même en parties

inégales, pourvu que leur nombre croisse indéfiniment et que leur plus grande partie tende vers zéro.

● REMARQUE 2. Au lecteur qui croirera que l'erreur consiste dans le fait que la longueur de la « scie » est invariable et que, par suite, on ne peut parler de limite, on peut répondre qu'en mathématiques on étudie également des suites de nombres égaux dont la limite est ce même nombre en vertu de la définition précise de la notion de « limite ». Il est d'ailleurs facile de modifier les données du problème de façon que la longueur de la « scie » devienne une variable, le reste conservant toute sa valeur. Il suffit pour cela d'enlever une dent dans chaque « scie », disons la première à partir du point A, autrement dit, de remplacer les deux premiers chaînons par un segment de l'hypoténuse issu du point A (on diminue ainsi le nombre de chaînons de chaque « scie » d'une unité). Cette « scie ébréchée » aura toujours pour limite le segment AB, tandis que sa longueur, différant d'une quantité « infiniment petite » de la somme des longueurs des côtés $AC + BC$, tendra vers cette somme comme limite.

● EXEMPLE 13. *La valeur du nombre π est 2.*

En prenant le segment AB pour diamètre construisons une demi-circonférence (fig. 28). Divisons le segment AB en deux et en considérant chaque moitié comme diamètre traçons deux demi-circonférences de part et d'autre du segment AB. Ces deux demi-circonférences forment une ligne ondulée (qui par son aspect extérieur rappelle une sinusoïde) dont la longueur de A à B est égale à celle de la demi-circonférence initiale, c.-à-d. à $\frac{\pi}{2}AB$; en effet, chacune des deux plus petites demi-circonférences a une longueur deux fois plus courte, car son diamètre est deux fois moins grand. Divisons maintenant le segment AB en quatre parties égales et construisons une ligne ondulée formée de quatre demi-circonférences (cf. fig. 28) dont la somme des

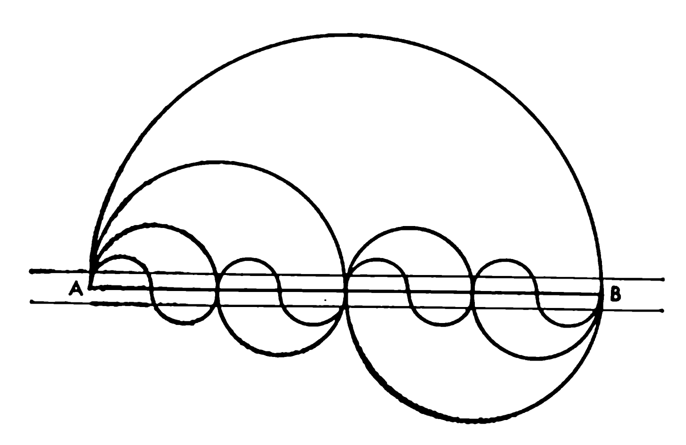


Fig. 28

longueurs est $\frac{\pi}{2} AB$. Poursuivons cette opération indéfiniment en divisant le segment AB en 8, 16, . . . parties égales et en construisant chaque fois des demi-circonférences disposées alternativement de part et d'autre de la droite AB. On obtient une suite des lignes ondulées qui se rapprochent de plus en plus du segment AB en ayant ce segment pour limite dans le sens que la plus grande distance des points de chaque ligne ondulée de la droite AB (celle-ci étant évidemment égale au rayon des demi-circonférences formant la ligne ondulée) tend vers zéro à mesure qu'on s'éloigne du point de départ de la suite (sur la fig. 28 on a représenté une bande limitée par deux droites parallèles à AB; aussi étroite que soit cette bande, il existera un moment à partir duquel toutes les lignes ondulées s'inséreront entièrement au sein de la bande le long de toute la longueur s'étendant de A à B). Mais, la longueur de toutes ces lignes ondulées est constante et égale à $\frac{\pi}{2} AB$, il en

est de même de leur limite, c.-à-d. du segment AB. De l'égalité $\frac{\pi}{2}AB = AB$ il s'ensuit que $\pi = 2$.

● REMARQUE. Les remarques 1 et 2 formulées pour l'exemple 12 restent en vigueur: ni le procédé de division du segment AB en parties, ni la constance de la longueur de la ligne ondulée ne jouent un rôle important. Comme dans l'exemple précédent, on pourrait remplacer l'une des demi-circonférences de la ligne ondulée par son diamètre et rendre sa longueur variable. Nous laissons au lecteur le soin d'examiner d'autres cas: au lieu de construire des demi-cercles, c.-à-d. des segments contenant un angle droit, on pourrait construire des segments inscrivant un autre angle (soit constant, soit variant selon une loi déterminée en fonction du nombre de divisions, mais ne tendant pas vers 180^c); alors le nombre π admettra d'autres valeurs.

● EXEMPLE 14. « Cylindre de Schwarz ».

Pour mesurer l'arc AB d'une courbe quelconque (fig. 29, à gauche) on procède de la même façon qu'en mesurant une circonférence ou ses parties, à savoir: après avoir inscrit des lignes brisées dans cet arc (dans le cas considéré elles ne sont pas obligatoirement régulières, car pour un arc non circulaire cela ne peut être obtenu que fortuitement), on construit une suite infinie de ces lignes brisées en rapprochant indéfiniment les sommets, c.-à-d. en procédant de façon que la longueur du segment maximal de la ligne brisée tende vers zéro à mesure que les termes de la suite s'éloignent. La suite de longueurs de ces lignes brisées aura justement pour limite la longueur de l'arc mesuré.

En passant au mesure des aires, on aboutit au problème suivant: déterminer l'aire d'une figure F tracée sur une surface gauche (fig 29, à droite). Par analogie avec un arc l'intuition suggère d'inscrire dans cette figure des surfaces polyédriques *) aux faces de plus en plus petites: l'aire

*) Une surface polyédrique est dite inscrite dans une surface gauche si tous ses sommets se trouvent sur cette dernière.

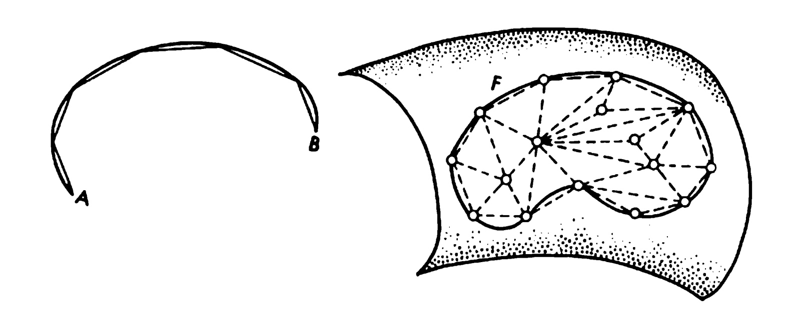


Fig. 29

de la figure F sera la limite de l'aire de la surface polyédrique variable (c.-à-d. de la somme des aires de ses faces). Cette proposition doit être précisée: à l'intérieur de la figure F et sur son contour prenons une infinité de points que l'on relie trois à trois à l'aide des surfaces planes de sorte que soit formée une surface polyédrique aux faces triangulaires dont aucun couple n'a de points intérieurs communs et aucun groupe de trois faces n'a d'arête commune. On construit une suite infinie F_1, F_2, ... F_n, . . . de surfaces polyédriques inscrites dans la figure F de façon que la longueur de l'arête maximale (c.-à-d. du côté maximal de toutes les faces triangulaires) de la surface F_n tende vers zéro quand $n \to \infty$ et que chaque point de la figure F serve de limite pour une certaine suite de points pris respectivement sur F_1, F_2, . . ., F_n, . . . (de plus on tâchera que le contour de la surface polyédrique reste toujours inscrit dans celui de la figure F, cf. fig. 29). Il est presque évident que la suite d'aires des surfaces polyédriques F_1, F_2, ... F_n, . . . a pour limite l'aire de la figure F. Tout

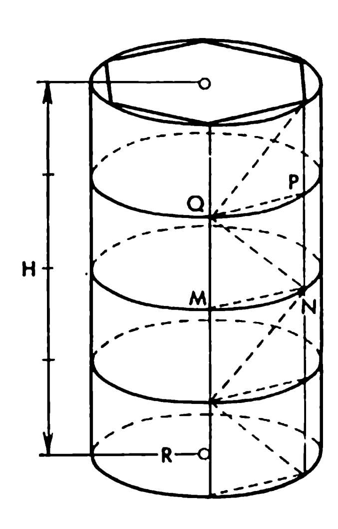


Fig. 30

comme dans les exemples précédents on ne peut pratiquement distinguer une surface courbe de la surface polyédrique inscrite dans la première quand ses faces deviennent très petites. Mais à la fin du siècle passé le mathématicien allemand H. Schwarz a montré sur un exemple fort simple que cette évidence était trompeuse. Nous passons maintenant à son exposé.

Considérons un cylindre circulaire droit de rayon R et de hauteur H (fig. 30) ; cherchons l'aire de sa surface latérale par le procédé exposé ci-dessus. Dans ce but divisons sa hauteur en n parties égales et traçons par les points de division des plans perpendiculaires aux génératrices ; leur intersection avec la surface latérale du cylindre donne $n - 1$ cercles qui, en comptant les cercles de base, divisent cette surface en n bandes cylindriques égales. Inscrivons ensuite dans l'un de ces cercles un polygone régulier à m côtés et menons par ses sommets des génératrices qui diviserons chacun des autres cercles en m parties égales. Les points de

division seront les sommets des polygones réguliers inscrits dans les cercles. Les segments de ces génératrices avec les côtés des polygones inscrits forment mn rectangles identiques (l'un d'eux $MNPQ$ est représenté sur la fig. 30) dont les sommets se trouvent sur la surface du cylindre. Il ne reste qu'à diviser chaque rectangle par une diagonale en deux triangles pour obtenir une surface polyédrique inscrite dans la surface latérale du cylindre et formée de $2mn$ faces triangulaires (identiques). Les nombres m et n croissant indéfiniment, les côtés de ces faces triangulaires, de même que les distances de tous leurs points à la surface latérale du cylindre *), tendent vers zéro.

Parmi les polygones inscrits considérés ci-dessus chacun est déterminé par les valeurs de m et n, mais il existe une infinité de procédés d'établir des suites de polygones, en définissant tout simplement l'un des paramètres comme une fonction de l'autre (il va de soi que les deux paramètres doivent toujours avoir des valeurs naturelles tendant simultanément vers l'infini), en posant, par exemple, $m = n$ ou $n = 3m$, ou $m = n^2$, etc. Le lecteur a probablement déjà remarqué que les surfaces polyédriques obtenues coïncident avec les surfaces latérales des prismes réguliers à m faces inscrits dans le cylindre, et la division de chacune des faces rectangulaires en $2n$ triangles n'avait pour seul objectif que le besoin de se conformer au schéma général d'inscription des polygones représenté sur la fig. 29. On a donc suivi le mode généralement admis, en le compliquant quelque peu, pour établir la formule de l'aire de la surface latérale d'un cylindre ($S_{\text{lat. cyl.}} = 2\pi RH$) au moyen de l'inscription de prismes réguliers et du passage à la limite. Jusqu'à là nos raisonnements n'ont rien de sophistique.

Modifions maintenant quelque peu le mode d'inscription de la surface polyédrique. Divisons comme auparavant la hauteur H en n parties égales, menons $n - 1$ sections circu-

*) La distance d'un point quelconque à la surface latérale du cylindre s'exprime par la différence entre son rayon et la distance de ce point à l'axe du cylindre.

laires, ce qui donne $n + 1$ cercles (y compris les cercles de base du cylindre) ; inscrivons dans chacun d'eux un polygone régulier de m côtés mais cette fois disposons leurs sommets différemment : on tâchera que la génératrice passant par n'importe quel sommet du polygone inscrit dans un cercle quelconque divise en deux l'arc sous-tendu par le côté du polygone inscrit dans le cercle voisin (ainsi, la génératrice passant par le point P sur la fig. 31 divise en deux les arcs MN et QS ; les génératrices QM et SN ne sont pas indiquées sur la fig. 31). En d'autres termes : si précédemment tout polygone inscrit dans un cercle quelconque était obtenu du polygone inscrit dans le cercle voisin par translation suivant la génératrice d'une distance $\frac{H}{n}$, maintenant cette translation s'accompagne d'une rotation autour du centre du polygone d'un angle égal à la moitié de son angle au centre, c.-à-d. de $\frac{\pi}{m}$. Après avoir disposé de cette façon les polygones réguliers inscrits on construit une surface polyédrique (non convexe !) formée de faces triangulaires, en joignant chaque sommet aux deux sommets les plus proches du cercle voisin. Cette surface polyédrique (qui rappelle un lampion se plissant en accordéon) formée de $2mn$ triangles isocèles égaux chacun à chacun ($2m$ dans chacune de n bandes) est inscrite (au sens exact de ce terme) dans la surface courbe du cylindre (voir note page 245).

Pour déterminer l'aire de la surface polyédrique, prenons l'une de ses faces égales MNP, représentée à la fig. 31 et, séparément, à la fig. 32, où MN est le côté du polygone régulier de m côtés inscrit dans une section circulaire de centre O, les points K et L étant respectivement les milieux de l'arc MN et de la corde MN ; PK est un segment de la génératrice. Le triangle MNP est isocèle ($PM = PN$, car leurs projections KM et KN sur le plan du cercle sont égales) ; sa hauteur PL peut être déterminée à partir du triangle PKL où $K = 90°$, $PK = \frac{H}{n}$, $KL = R - OL =$

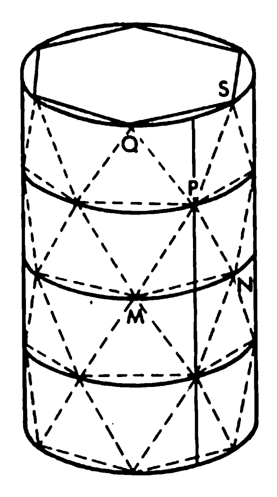


Fig. 31

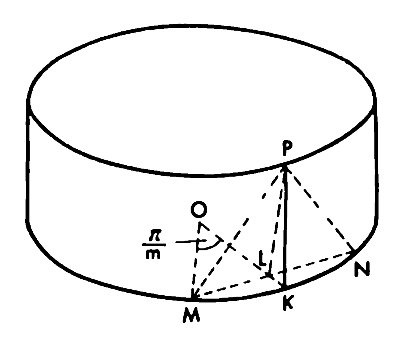


Fig. 32

$= R - R\cos\frac{\pi}{m} = 2R\sin^2\frac{\pi}{2m}$, d'où

$$PL = \sqrt{\left(\frac{H}{n}\right)^2 + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Comme $1/2MN = R\sin\frac{\pi}{m}$, on a

$$\text{aire}\, MNP = R\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^2}{n^2} + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

En désignant par $S_{m,n}$ l'aire de toute la surface polyédrique obtenue en divisant la circonférence en m et la hauteur en n parties, on trouve:

$$S_{m,n} = 2mnR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^2}{n^2} + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}} =$$

$$= 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2 + 4n^2R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Comme nous l'avons dit plus haut en d'autres circonstances, de l'ensemble des nombres $S_{m,n}$ on peut séparer, par une infinité de procédés, des suites en établissant une dépendance entre m et n; envisageons deux cas :

a) $n = m^2$, c.-à-d. en divisant de proche en proche la circonférence en 3, 4, 5, . . . parties, nous divisons la hauteur respectivement en 9, 16, 25, . . . parties. Alors, l'aire de la surface polyédrique (il convient de la noter maintenant par S_m, car elle ne dépend que de m) a pour expression :

$$S_m = 2mR \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{H^2 + 4m^4R^2 \sin^4 \frac{4\pi}{2m}} .$$

Il faut maintenant passer à la limite $m \to \infty$ lorsque $\frac{\pi}{m}$ et, par conséquent, $\sin \frac{\pi}{m}$, $\sin \frac{\pi}{2m}$ tendent vers zéro. Pour recourir à la dernière formule qui figure dans la note à la page 240, transformons l'expression de S_m :

$$S_m = 2\pi R \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \sqrt{H^2 + \frac{1}{4} \pi^4 R^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}} \right)^4},$$

pour obtenir :

$$\lim_{m \to \infty} S_m = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{1}{4} \pi^4 R^2}.$$

Cette limite est manifestement plus grande que $2\pi RH$, l'expression largement connue de l'aire de la surface latérale d'un cylindre. On pourrait également obtenir pour la limite d'autres valeurs, y compris les valeurs aussi grandes que l'on veut ; en posant $n = km^2$ (k étant un nombre naturel), on aurait

$$\lim_{m \to \infty} S_m = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{k^2}{4} \pi^4 R^2} .$$

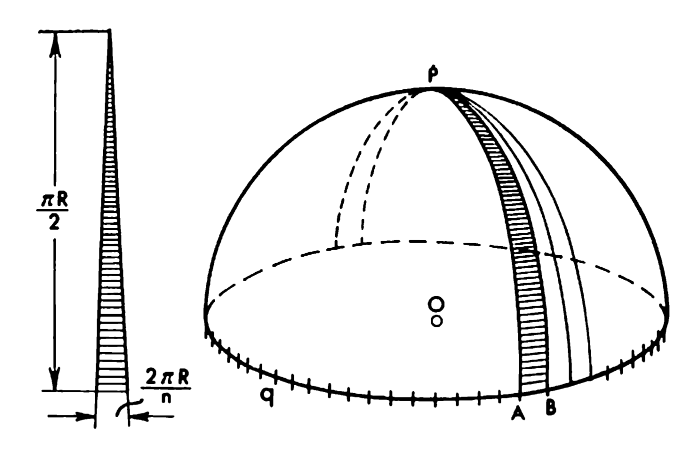


Fig. 33

b) $n = m^3$, et par conséquent le nombre de divisions de la hauteur croît bien plus rapidement que dans le cas précédent. Dans l'expression pour S_m cela fera apparaître le facteur supplémentaire m^2 dans le deuxième terme de la somme sous le radical, c'est pourquoi ce terme ainsi que S_m tendront vers l'infini pour $m \to \infty$. Cela signifie qu'on peut établir une loi d'inscription des surfaces polyédriques dont les aires, tout en croissant indéfiniment, ne tendent vers aucune limite. Il en résulte donc que la surface latérale d'un cylindre n'a pas d'aire.

On a ainsi abouti à des cas manifestement absurdes et il faut maintenant en rechercher l'erreur.

● EXEMPLE 15. *L'aire d'une sphère de rayon R est égale à π^2R^2.*

Considérons une demi-sphère (fig. 33) de centre O, d'« équateur » q et de « pôle » P (cela signifie que le rayon OP est perpendiculaire au plan de l'équateur q passant par

O). Divisons la circonférence q en un très grand nombre n de parties égales et joignons P avec tous les points de division par des arcs de grands cercles (chaque arc vaut 1/4 du « méridien »), la demi-sphère sera alors divisée en n triangles sphériques très étroits, dont chacun est limité par un petit arc de l'équateur et deux arcs de méridiens (quelques-uns de ces triangles sont représentés sur la fig. 33, le triangle PAB est hachuré). En augmentant indéfiniment le nombre de divisions n on peut rendre ces triangles sphériques aussi étroits que l'on veut (plus minces qu'une « toile d'araignée »), quant au triangle gauche « indéfiniment étroit » il peut être étendu ou, comme on le dit, « développé » suivant un plan en conservant invariables toutes ses dimensions (c.-à-d. longueurs, angles, aire). On obtient ainsi un triangle plan (isocèle) dont la base est égale à l'arc de longueur $\frac{2\pi R}{n}$, la hauteur est l'arc rectifié qui vaut le quart de la circonférence, c.-à-d. de longueur $\frac{\pi R}{2}$ (voir le triangle hachuré sur la fig. 33, à gauche). L'aire d'un tel triangle est $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi R}{n}\times$ $\times\frac{\pi R}{2}=\frac{1}{2n}\pi^2R^2$, par conséquent, l'aire totale de tous les n triangles formant la demi-sphère est égale à $\frac{1}{2}\pi^2R^2$ et celle de toute la sphère — π^2R^2. Cette expression ne correspond pas à la formule bien connue d'après laquelle cette aire est égale à $4\pi R^2$ (or, $\pi\neq 4$).

IV. ANALYSE DES EXEMPLES DU CHAPITRE III

● EXEMPLE 11. Sous sa forme classique ce sophisme se rapporte plutôt à la mécanique (plus précisément, à la cinématique qui étudie le mouvement des corps) qu'à la géométrie, puisqu'il s'agit d'une roue se déplaçant de façon particulière. Toutefois, on devrait s'attendre qu'après un examen détaillé cet aspect cinématique sera rejeté, car le temps n'y est pas un facteur essentiel (il est indifférent que cette roue soit animée d'un mouvement rapide ou lent); et la nature sophistique du problème peut être exposée en langage géométrique, ce qu'on fera d'ailleurs plus loin.

Il est évident que le point faible de nos raisonnements réside dans l'imprécision de l'expression: « la circonférence roule (sans glisser) sur une droite ». Il suffit de préciser son sens pour pouvoir conclure aussitôt que seule roule l'une des circonférences liées ensemble, tandis que l'autre ne roule pas, et par suite la démonstration sophistique s'écroule.

Etudions d'abord le problème sous l'angle cinématique. Quand on dit que le cercle roule sans glisser sur une droite, cela signifie qu'il se déplace de manière qu'à chaque instant il soit tangent à la droite et le point de contact appartenant au cercle a à cet instant une vitesse nulle. En d'autres termes, le point du cercle qui se trouve à ce moment « en bas », c.-à-d. coïncide avec le point de contact, joue par rapport à cette circonférence mobile le rôle de « centre instantané de rotation ». Cela veut dire que la vitesse de tout point lié à la circonférence (il n'est pas nécessaire que le point soit sur la circonférence) est à chaque instant telle comme si la circonférence tournait à l'instant donné autour de son point de contact. En particulier, la direction de cette vitesse est perpendiculaire à la droite reliant le point donné au point de contact; c'est ainsi que, par exemple, en conser-

vant les notations de la fig. 24, la direction de la vitesse du point, passé à la position M', est perpendiculaire à la droite $M'P$ (pour la cycloïde, représentée à la fig. 26, la normale au point M' est la droite $M'P$).

Au contraire, si le point de la circonférence qui se trouve à l'instant donné « en bas » a une vitesse non nulle, on dit que le mouvement est « à glissement positif » si cette vitesse est dirigée dans le sens du mouvement et « à glissement négatif » si elle est dirigée dans le sens opposé. Ce n'est qu'en l'absence de glissement qu'on peut affirmer que le chemin parcouru suivant la droite durant un intervalle de temps quelconque est égal à la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre décrit par un rayon quelconque du cercle au cours de ce laps de temps. Ainsi, par exemple, sur les fig. 24 et 26 $MP = \overset{\frown}{PM'}$, et, en particulier, le segment MM^* est égal à la longueur de toute la circonférence mobile. Pour un glissement positif $MP > \overset{\frown}{PM'}$, pour glissement négatif $MP < \overset{\frown}{PM'}$.

Nous pouvons maintenant décrire les différentes formes de roulement du point de vue purement géométrique tout en recourant quelquefois pour faire image au langage de cinématique. Considérons le segment $MM^* = 2\pi R$ (fig. 24 et 26) et en chaque point P du segment construisons d'un côté de MM^* un cercle tangent de centre O' et de rayon R. Portons sur ce cercle l'arc PM' dont la longueur et la direction au point P coïncident avec celles du segment PM *). Si l'on effectue cette construction pour toutes les positions possibles du point P sur le segment MM^*, on dit alors (si le langage est emprunté à la cinématique, les images sont tout à fait géométriques) que l'ensemble de tous les cercles tangents est obtenu au cours d'une seule révolution du cercle de rayon R roulant sans glisser sur la droite MN, et on

*) Cela signifie que l'arc PM' (s'il est supérieur à la demi-circonférence, on prend la partie de l'arc adjacente à P) et le segment PM sont disposés d'un même côté du diamètre PO' (pour une autre courbe mobile on aurait dit: d'un même côté de la normale).

appelle trajectoire du point M le lieu géométrique des points M' correspondant aux différentes positions du point P. Si l'on remplaçait dans la construction précédente l'égalité $MP = \overset{\frown}{PM'}$ par le rapport $MP = k\overset{\frown}{PM'}$ (k est un facteur constant non nul), on aurait dit que le cercle roule « avec un glissement constant de coefficient k », ce glissement étant positif ou négatif suivant le signe de la différence $k - 1$.

Après avoir précisé ces définitions, revenons à la roue d'Aristote. Du point de vue de cinématique, si le plus grand des cercles concentriques, représentés sur la fig. 24, roule sans glisser sur la droite MN, le petit cercle n'effectue pas évidemment de tel mouvement sur la droite M_1N_1. En effet, si le petit cercle roulait aussi sans glisser, au moment, où leur centre commun coïncide avec le point O', la figure en mouvement aurait simultanément deux centres instantanés de rotation P et P_1 (et la vitesse du point M' serait perpendiculaire à la fois à PM' et à P_1M', ce qui est impossible). De plus, le petit cercle roule pour ainsi dire avec un glissement positif, car $M_1P_1 = MP = \overset{\frown}{PM'}$ et par suite $M_1P_1 > \overset{\frown}{P_1M'_1}$. Par contre, si le petit cercle était animé sur M_1N_1 d'un mouvement sans glissement, le grand cercle qu'il entraîne roulerait avec un glissement négatif.

Des raisonnements géométriques nous amènent aux mêmes conclusions: si le plus grand cercle de la fig. 24 « roule » de façon qu'en toute position du cercle soit vérifiée l'égalité $MP = \overset{\frown}{PM'}$, on aura pour le petit cercle $M_1P_1 > \overset{\frown}{P_1M'_1}$ et, notamment, $M_1P_1 = \frac{R}{r}\overset{\frown}{P_1M'_1}$, R et r étant respectivement les rayons du grand et du petit cercle. Ainsi, le petit cercle roule avec un glissement positif de coefficient $\frac{R}{r}(>1)$. Si, par contre, le petit cercle roulait sans glisser, le grand cercle, lui, serait animé d'un mouvement à glissement négatif de coefficient $\frac{r}{R}(<1)$.

● REMARQUE CONCERNANT L'INDICATION DE LA PAGE 235. Considérons deux polygones concentriques et homothétiques à n côtés $A_1A_2 \ldots A_n$ et $a_1a_2 \ldots a_n$ de centre O (fig. 34, où $n = 8$ et où on a conservé pour le grand polygone les mêmes notations que sur la fig. 25). Soit le grand polygone roulant de façon décrite à la page 236 : le sommet A_2 reste d'abord immobile en tant que centre de rotation, jusqu'au moment où ce polygone pivotera d'un angle de $\frac{2\pi}{n}$ (souvenons-nous que dans le cas du cercle mobile son point « inférieur » était également un centre de rotation mais seulement un centre instantané). Après cette rotation le grand polygone vient se poser sur la droite par son autre côté A_2A_3 dont la nouvelle position désignée par $A'_2A'_3$ se trouve sur le prolongement du côté A_1A_2; par suite au cours de ce roulement le périmètre du polygone se « développera » suivant la droite.

Quant au mouvement du petit polygone qui lui est lié il s'effectuera d'une manière essentiellement différente : il pivotera également autour du centre A_2 d'un angle de $\frac{2\pi}{n}$ et son côté a_2a_3 prendra la position $a'_2a'_3$, mais il ne sera pas le prolongement du segment a_1a_2. Contrairement au polygone $A_1A_2 \ldots A_n$ qui « se dispose » successivement sur chacun de ses côtés, $a_1a_2 \ldots a_n$ « se dispose » en « sautant » simultanément d'une position à une autre (la fig. 34 donne deux positions successives du grand polygone et trois positions du petit polygone ; on a représenté également les parties initiales des trajectoires des sommets a_1, a_2, a_3 : chacune de ces parties de trajectoires est formée de deux arcs de cercle de $\frac{2\pi}{n}$ radians, ainsi, par exemple, pour le sommet a_2 ce sont l'arc $a_2a'_2$ de centre A_2 et l'arc $a'_2a''_2$ de centre A'_3 ; de même que pour la fig. 25, nous recommandons au lecteur de ne pas attacher de l'importance à certaines particularités de la fig. 34 dues à la valeur particulière

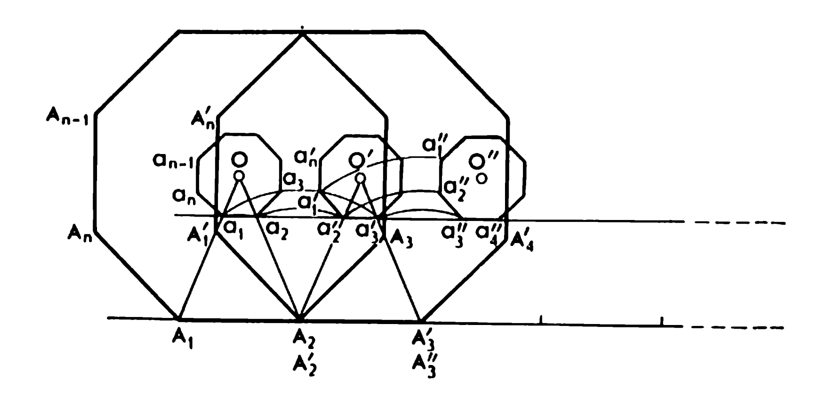


Fig. 34

de $n = 8$ et de faire un autre dessin pour $n = 5$, par exemple). Grâce à ces « sauts » le polygone $a_1a_2 \ldots a_n$ se déplaçant le long de la droite $a_1a_1^{(n-1)}$ « parcourt » un chemin plus grand que son périmètre; tel est le modèle approché d'un « roulement à glissement positif ». Laissons au lecteur le soin de déterminer le mouvement du polygone $A_1A_2 \ldots$ $\ldots A_n$ au cas où le polygone $a_1a_2 \ldots a_n$ roulerait sans glisser sur une droite: on peut prévoir qu'après chaque rotation d'un angle $\frac{2\pi}{n}$ autour du sommet du petit polygone le côté du grand polygone se superposera partiellement sur son côté précédent et le chemin parcouru par ce polygone au cours d'un tour complet s'avérera plus court que son périmètre; on obtiendra ainsi l'image approchée d'un « roulement à glissement négatif ».

● REMARQUE CONCERNANT LE PROBLÈME DE LA PAGE 238. Il suffit d'effectuer le dessin en l'accompagnant de certains résultats intermédiaires.

La fig. 35 donne la trajectoire $A_1A_1'A_1'' \ldots A_1^{(n-1)}$ du sommet A_1 d'un triangle roulant (cas particulier pour $n = 8$); pour plus de détail

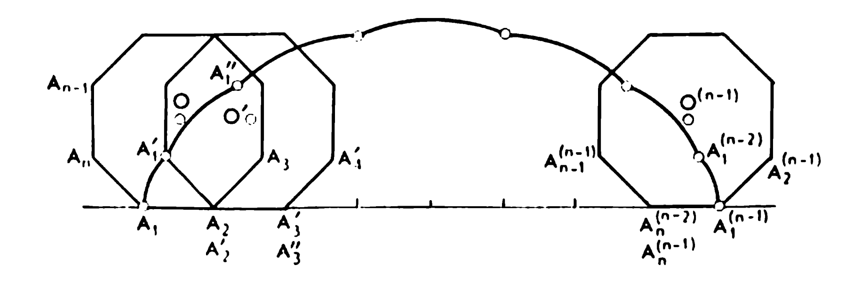


Fig. 35

voir page 238. La longueur de cette trajectoire, formée d'arcs de cercle, est égale à

$$\frac{2\pi}{n}\cdot 2R\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{4\pi R}{n}\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

L'aire de la figure limitée par cette trajectoire et le segment $A_1A_1^{(n-1)}$ se compose 1) des aires des secteurs circulaires $A_2A_1A_1'$, $A_3'A_1'A_1''$, ..., $A_n^{(n-2)}A_1^{(n-2)}A_1^{(n-1)}$ dont les angles au centre sont égaux chacun à $\frac{2\pi}{n}$; la somme de ces aires est

$$\frac{4\pi R^2}{n}\left(\sin^2\frac{\pi}{n}+\sin^2\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=2\pi R^2;$$

2) des aires des triangles $A_1'A_2A_3'$, $A_1''A_3'A_4''$, ..., $A_1^{(n-2)}A_{n-1}^{(n-3)}A_n^{(n-2)}$ dont la somme est

$$2R^2\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\right)=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}.$$

● EXEMPLE 12. L'erreur logique est dans la dernière phrase de la démonstration (qui précède la remarque 1) et réside dans l'ambiguïté du terme « limite ». Il s'agit d'abord d'une suite de lignes (dans ce cas ce sont des « scies » à nombre de « dents » variable), dont les points se rapprochent indéfiniment d'une certaine ligne déterminée. Puis on passe à une suite de nombres (longueurs de « scies ») qui se rapprochent indéfiniment d'un certain nombre déterminé (pour savoir si les longueurs des scies peuvent former une suite cf. remarque 2, page 243).

Du fait qu'une suite des lignes tend (dans un sens) vers une ligne déterminée il ne découle aucunement que la suite des longueurs des premières lignes tend (dans un autre sens) vers la longueur de la dernière.

Le fait que la « scie » à dents très petites ne diffère pratiquement pas du segment rectiligne ne doit pas nous troubler ; ce n'est pas un fait géométrique mais physique ou plutôt physiologique et il dépend de la vision humaine (un puissant microscope l'aurait bien prouvé). Mais si l'on s'en tient toujours à l'évidence de l'image, on peut par des raisonnements l'interpréter de la façon suivante. Il est vrai que pour un petit triangle (« dent de scie ») la différence entre la somme des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse est insignifiante, mais le nombre de ces différences est très grand, or, des termes même très petits une fois sommés peuvent évidemment former n'importe quelle somme. Si l'on voulait aller au fond de la question, on verrait aisément que les chaînons de « scie » tendent à se confondre avec la droite AB suivant la distance et non pas la direction : quelque petits que soient ces chaînons ils sont toujours (cf. fig. 27) alternativement horizontaux et verticaux, tandis que l'hypoténuse AB est oblique.

● EXEMPLE 13. L'erreur est du même type que dans l'exemple précédent. La suite des lignes ondulées tend indéfiniment vers un segment rectiligne mais leurs longueurs

n'ont pas pour limite la longueur de ce dernier. Dans ce cas aussi une ligne tend vers l'autre suivant la distance et non pas la direction: si le segment AB est horizontal, la direction d'une ligne ondulée, quelque petites que soient ses parties circulaires, oscille toujours entre l'horizontale et la verticale.

● EXEMPLE 14. Bien que ce cas soit beaucoup plus compliqué que les deux précédents, la nature logique du sophisme reste la même: en effet, la surface polyédrique tend indéfiniment vers la cylindrique, mais de ce fait il ne s'ensuit nullement que son aire tend indéfiniment vers l'aire cylindrique. Pour mieux distinguer la nature de ces deux limites, notons qu'en inscrivant une surface polyédrique de la façon indiquée sur la fig. 31 on aurait pu obtenir une formule exacte pour l'aire de la surface latérale d'un cylindre en posant $n = m$ ou $n = 10m$, ou plus généralement, en admettant que les nombres de divisions suivant la hauteur et la circonférence varient proportionnellement l'un à l'autre. Ainsi, par exemple, pour $n = 10m$, on aurait

$$S_m = 2mR \sin\frac{\pi}{m} \sqrt{H^2 + 400m^2R^2 \sin^4\frac{\pi}{2m}} =$$

$$= 2\pi R \frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \sqrt{H^2 + \frac{25\pi^4R^2}{m^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4}$$

et pour $m \to \infty$ on obtiendrait $\lim S_m = 2\pi RH = S_{\text{lat. cyl.}}$. Comment expliquer alors le fait qu'en inscrivant une surface polyédrique d'après un rapport de proportionnalité différent régi par la formule $n = m^2$, l'aire S_m de cette surface tend vers une limite dépassant $2\pi RH$ et pour $n = m^3$ tend même vers l'infini? Sans prétendre de donner ici quelque démonstration et en faisant abstraction du langage mathématique nous n'allons prendre en considération que des faits évidents par eux-mêmes (mais qui une fois mis sous forme mathématique peuvent servir de base à des démonstrations).

Pour $n = m$ ou $n = 10m$, etc., le nombre de divisions de la circonférence et de la hauteur croît suivant le même rythme, la surface polyédrique non convexe possédant alors des faces presque verticales dans l'hypothèse d'un cylindre posé verticalement (nous laissons au lecteur le soin de démontrer sur la base de la fig. 32 que la face MNP forme avec le plan horizontal MKN un angle qui tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque $m \to \infty$). Par suite, la surface polyédrique tend vers la cylindrique non seulement suivant la distance mais également la direction. Mais pour $n = m^2$, $n = m^3$, etc., la situation est différente; dans ce cas le nombre de divisions suivant la hauteur augmente plus rapidement que suivant la circonférence. La surface polyédrique devient de ce fait manifestement plus « en scie », d'où apparaît une aire superflue. Les faces triangulaires ne tendent plus vers une position verticale; on peut même montrer que, pour $n = m^2$, l'angle PLK (fig. 32) tend indéfiniment vers un certain angle aigu et, pour $n = m^3$, même vers zéro (c.-à-d. la face tend vers une position horizontale) lorsque $m \to \infty$.

En résumé considérons une question qui se présente de façon toute naturelle: où réside la différence entre l'inscription des lignes polygonales dans une ligne courbe et celle des surfaces polyédriques dans une surface gauche? Pourquoi dans le premier cas l'augmentation du nombre de sommets des lignes les fait tendre vers une limite non seulement suivant la distance, mais aussi suivant la direction, et dans le deuxième cas cette tendance se manifeste suivant la distance mais non la direction? Sans entrer dans les détails nous nous bornons à souligner les faits suivants. Si deux points quelconques (dont l'un est fixe) d'une ligne courbe tendent à coïncider, la droite qui les relie a pour limite la tangente à cette courbe menée par le point fixe. Mais si trois points quelconques d'une surface gauche (même n'appartenant pas à une même droite), parmi lesquels l'un est fixe, tendent à se confondre, le plan joignant ces points ne tend pas nécessairement à devenir un plan tangent. Pour s'en convaincre il suffit d'imaginer sur une sphère une section circulaire quelconque dont la circonférence possède un point fixe et deux autres points tendant indéfiniment vers le premier; le plan auquel appartiennent ces trois points sera toujours un plan sécant.

● EXEMPLE 15. C'est un cas où il est fait abus d'expressions privées de sens mathématique telles que: « un très grand nombre », « un triangle très effilé », « un petit arc », « un triangle infiniment effilé » qui sont bien à leur place quand on cherche à décrire de façon imagée une figure géométrique (ce procédé était utilisé plus haut à maintes reprises), mais qui sont absolument inadmissibles comme un procédé de démonstration ou d'établissement de formules. L'erreur réside dans l'affirmation qu'un triangle infiniment effilé peut être développé sur un plan, c.-à-d. qu'on peut remplacer un triangle sphérique par un triangle plan ayant les mêmes longueurs des côtés, les mêmes angles et la même aire. En fait, aucun triangle sphérique (quelque petit qu'il soit) ne peut être développé, dans le sens indiqué, sur un plan; cela découle déjà du fait que la somme des angles d'un triangle plan est toujours égale à 2 droits, et celle d'un triangle sphérique dépasse toujours 2 droits. Dans le cas considéré les angles A et B du triangle sphérique PAB (fig. 33, à droite) sont droits; si un tel triangle pouvait être développé sur un plan, on obtiendrait un triangle plan (isocèle) (fig. 33, à gauche) avec des angles adjacents à la base droits.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 5

● V. BOLTIANSKI. ENVELOPPES 7

Chapitre premier. Parabole de sûreté 9

Chapitre II. Hyperbole — frontière de la zone d'audibilité 28

Chapitre III. Astroïde et cycloïde 50

Chapitre IV. Enveloppes 61

● A. FÉTISSOV. DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES 109

● I. DOUBNOV. ERREURS DANS LES DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES 187

Introduction 189

Chapitre premier. Erreurs dans les raisonnements à la portée des débutants 195

Chapitre II. Analyse des exemples du chapitre I 214

Chapitre III. Erreurs dans les raisonnements en liaison avec la notion de limite 233

Chapitre IV. Analyse des exemples du chapitre III 254

A NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Ecrire à l'adresse :

Pervi Rijski péréoulok, 2, Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique